Jan Tesař:

Poznámky k Archimédovu zákonu

1. Formulace Archimédova zákona

Archimédův zákon určující kvantitativně velikost síly, kterou je nadlehčováno těleso ponořené zcela nebo částí svého objemu v kapalině, byl znám již za starověku. Dalo by se tedy předpokládat, že zákon sám i všechny jeho důsledky byly všestranně vyšetřeny během staletí, která uplynula od jeho objevu až do naší doby. Přesto jsem však za svého působení na školách poznal, že většina žáků nechápe správně všechny důsledky Archimédova zákona a při různých příležitostech jsem se přesvědčil, že i některým učitelům není jasná celá problematika tohoto zákona. Je to patrno již z toho, že na školách všech typů, od nejnižšího stupně až po vysoké školy, na kterých se vyučuje fyzice, se užívá téměř výhradně této chybné formulace Archimédova zákona:

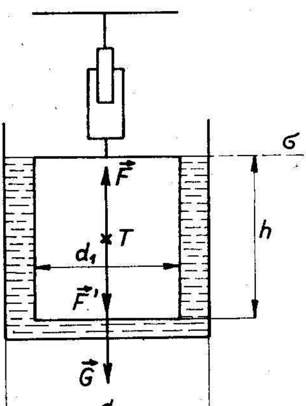
Těleso ponořené do kapaliny celým svým objemem nebo jeho částí je v ní nadlehčováno silou, která se rovná tíze kapaliny vytlačené ponořenou částí tělesa (A).

Formulace (A) Archimédova zákona je nesprávná, jak se snadno přesvědčíme. Soustavu těles, tuhé těleso ponořené v kapalině (»kapalina + + těleso«), můžeme dostat tak, že těleso zavěšené na siloměru umístíme v prázdné nádobě, do které potom nalijeme tolik kapaliny, aby se v ní těleso buď úplně, nebo částečně ponořilo objemem V. Siloměr ukáže, že těleso je nadlehčováno vztlakovou silou **F**, jejíž velikost však nemůžeme určit tíhou vytlačené kapaliny, neboť v tomto případě těleso žádnou kapalinu nevytlačí. Naopak často (vždy je-li hustota kapaliny větší než hustota tělesa) vytlačí kapalina těleso z jeho původní polohy. V tomto případě nemá formulace (A) Archimédova zákona vůbec smysl.

Ponoříme-li do kapaliny, předem do nádoby nalité, tuhé těleso stejným objemem V jako v předcházejícím případě, vytlačí těleso určité množství kapaliny a pomocí siloměru se přesvědčíme, že těleso je kapalinou nadlehčováno v obou případech stejnou silou **F**.

Při jednom z dějů, kterým je možno získat soustavu »kapalina + těleso« nedává tedy formulace (A) vůbec smysl. Proto by byla nevhodná i kdyby v druhém případě byla správná, neboť Archimédův zákon má být formulován tak, aby vyhovoval za všech okolností, bez ohledu na děj, kterým se k soustavě těles »kapalina + těleso« došlo.

Jednoduchým pokusem však ukážeme, že formulace (A) Archimédova zákona je i v druhém z uvedených případů nesprávná. Těleso ponořené v kapalině vytlačí totiž téměř vždy méně kapaliny, než by mělo podle formulace (A) vytlačit.



Obr. 1

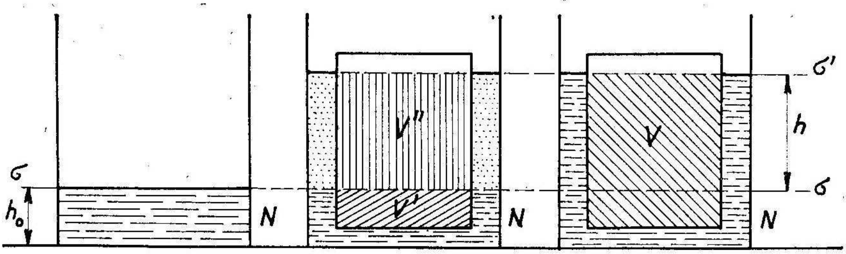
Obr. 1 znázorňuje přímý válec o výšce h s kruhovými podstavami o průměru d_1, zavěšený na siloměru, a kádinku o vnitřním průměru d_2. Vodorovné šrafy značí prostor vyplněný kapalinou, ve které je těleso ponořeno. Kapaliny je tolik, aby se celý válec právě potopil. Písmeno σ značí vodorovnou rovinu, v níž leží po ponoření válce jeho horní podstava a také povrch kapaliny. Protože je válec v kapalině nadlehčován silou **F**, je pružina siloměru napínána silou o velikosti

$$F' = G - F, \tag{1}$$

kterou přečteme na siloměru.

Působiště sil **F** a **F′** můžeme přemístit do těžiště T válce, kde má působiště tíha **G** válce. Síly **G**, **F**, **F′** mají pak společné působiště T a jsou stejnosměrné. Síly **G** a **F** jsou opačně orientovány. Síla **F** má podle vztahu (1) velikost

$$F = G - F' \tag{2}$$



Obr. 2

Změříme-li potom odměrným válcem objem kapaliny nalité do kádinky, zjistíme, že tíha nalité kapaliny je často menší než síla F, takže by ponořené těleso mělo podle formulace (A) Archimédova zákona vytlačit více, často mnohem více kapaliny než je jí v nádobě. Provedeme-li uvedený pokus s vodou a s ocelovým válcem o výšce $h = 5{,}0$ cm a o průměru podstavy $d_1 = 5{,}0$ cm a s nádobou o vnitřním průměru $d_2 = 5{,}2$ sm, pak siloměrem určíme tíhu válce $G \doteq 760$ p a velikost síly napínající pružinu siloměru po ponoření válce do vody $F' \doteq 660$ p. Přitom je mezi spodní podstavou válce a dnem nádoby mezera asi 1 mm. Válec je tedy při tomto pokusu nadlehčován podle vztahu (2) silou o velikosti $F \doteq 100$ p a měl by tedy podle formulace (A) Archimédova zákona vytlačit asi 100 cm³ vody. Tolik vody však těleso vytlačit nemůže, neboť se odměrným válcem zjistí, že v nádobce je jen asi 10 cm³ vody, tedy mnohem méně, než by jí měl ponořený válec podle formulace (A) vytlačit.

Z obou pokusů je patrno, že formulace (A) Archimédova zákona je nesprávná a že rozdíly mezi tíhou kapaliny vytlačené ponořeným tělesem a silou, kterou je těleso v kapalině nadlehčováno, jsou často tak veliké, že by mohlo dojít ke katastrofám v konstrukcích různých vodních děl a v zařízeních, ve kterých se pracuje s tlaky kapalin vytlačených ponořenými tělesy, kdyby se tyto tlaky počítaly podle formulace (A) Archimédova zákona.

Ačkoli žáci znají jen chybnou formulaci (A) a nepochybují o její správnosti, přes to při řešení úloh vyjadřují velkou většinou Archimédův zákon matematicky dobře. Usuzují totiž správně, že těleso ponořené v kapalině částí V svého objemu (obr. 2c) je nadlehčováno silou, která se rovná tíze kapaliny objemu V. Při tom se mylně domnívají, že celý objem V kapaliny byl tělesem vytlačen. To je ale představa nesprávná a neměla by být žákům užíváním formulace (A) vštěpována ani v ní nemají být žáci utvrzováni. Uplatní-li se však tato představa v chybné formulaci (A) Archimédova zákona, vede ke správnému výsledku, neboť těleso ponořené v kapalině celé nebo částí V objemu je skutečně kapalinou nadlehčováno silou, která se rovná tíze kapaliny objemu V. Že kapalina nebyla vytlačena z celého objemu V, nýbrž jen z jeho části, je patrno z obr. 2a a 2b. Bylo-li do prázdné nádoby N nalito tolik kapaliny, že před ponořením tělesa byl její povrch částí vodorovné roviny σ (obr. 2a), vytlačilo ponořené těleso kapalinu jen z části prostoru objemu V', šrafované na obr. 2b šikmými čarami, do prostoru označeného tečkami. Při tom se zvedl povrch kapaliny o výšku h do roviny σ', takže se těleso ponořilo do kapaliny objemem V, šrafovaným na obr. 2c šikmými šrafami, který je větší než objem V' kapaliny tělesem skutečně vytlačené. Rozdíl mezi objemem V a objemem V' skutečně vytlačeným je V''. Tento objem je na obr. 2b šrafován svislými čarami. Z části prostoru o objemu V'' nemohlo těleso kapalinu vytlačit, protože tam nebyla. Z této úvahy je patrno, že by se formulace Archimédova zákona měla upravit asi takto:

Těleso ponořené v kapalině větší částí V svého objemu je nadlehčováno silou **F**, *jejíž velikost se rovná tíze kapaliny objemu V. Je-li těleso ponořeno v kapalině zcela, značí V objem celého tělesa* (B).

Platí tedy

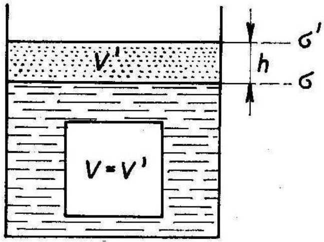
$$F = V\varrho' g,$$

kde

ϱ' značí hustotu kapaliny, do které je těleso ponořeno a g značí tíhové zrychlení.

Formulace (B) Archimédova zákona určuje velikost síly, kterou je těleso v kapalině nadlehčováno bez ohledu na děj, kterým došlo k soustavě těles »kapalina + těleso«, vždy kromě případu, kdy těleso je v kapalině umístěno tak, že mezi ponořené těleso a dno nádoby nemůže kapalina vniknout. Pak těleso není kapalinou vůbec nadlehčováno a síly vyvolané hydrostatickými tlaky kapaliny přitlačí těleso ke dnu nádoby.

Avšak i formulace (A) Archimédova zákona je v některých případech správná. Rozhoduje o tom hloubka, do které je těleso v kapalině ponořeno. Z obr. 2b je patrno, že všechna kapalina o objemu V', vytlačená tělesem, se přemístí ze šikmo šrafované polohy pod rovinou σ do tečkované polohy nad rovinou σ. Jestliže je ponořeno v kapalině celé těleso tak hluboko, že jeho nejvyšší místo je blíže ke dnu nádoby než rovina σ, ve které by se ustálil povrch kapaliny po vyjmutí tělesa z kapaliny, pak je $V' = V$ a formulace (A) a (B) jsou shodné. Na obr. 3 značí tečkovaná část prostor o objemu V', do něhož byla kapalina vytlačena ponořeným tělesem.



Obr. 3

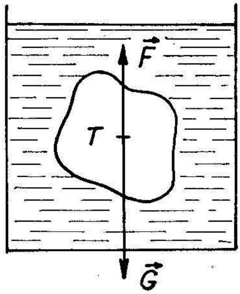
Formulaci (A) můžeme pokládat za shodnou s formulací (B) také v případě, že vzdálenost h rovin σ a σ', ve kterých leží povrchy kapaliny po ponoření tělesa a před jeho ponořením, je blízká nule ($h \doteq 0$).

2. Důkaz Archimédova zákona

Z úvah předcházející kapitoly vyplývá, že používaná formulace (A) Archimédova zákona platí jen ve zvláštních případech, nikoli obecně. To je jednou z příčin, že žákům a některým učitelům nejsou zcela jasné všechny důsledky Archimédova zákona.

Druhou hlavní příčinou tohoto stavu je podle mého mínění nevhodný postup při provádění důkazu Archimédova zákona. Archimédův zákon se totiž na žádném stupni našich škol nedokazuje obecně, tj. pro tělesa jakéhokoli tvaru a jakékoli polohy, nýbrž jen z rozdílu hydrostatických tlaků na dolní a horní podstavy některých těles v určitých polohách. Na středních školách jsou to kvádry nebo přímé kruhové válce s vodorovnými podstavami, aby se rušily tlaky na pláště těchto těles. Na vysokých školách se Archimédův zákon buď vůbec nedokazuje a jeho znalost se předpokládá, nebo se dokazuje obdobně jako na středních školách. Na vysokých školách je výhodou, že mohou užitím vyšší matematiky dokazovat Archimédův zákon obdobným způsobem jako na středních školách i pro některá tělesa jiných tvarů než jsou kvádry nebo válce, např. pro koule nebo kužely. Ale ani tyto důkazy nejsou obecné. Obecný důkaz pro tělesa libovolných tvarů v libovolných polohách se z rozdílů hydrostatických tlaků provést nedá. K obecnému důkazu se však snadno dojde ze zákona zachování mechanické energie.

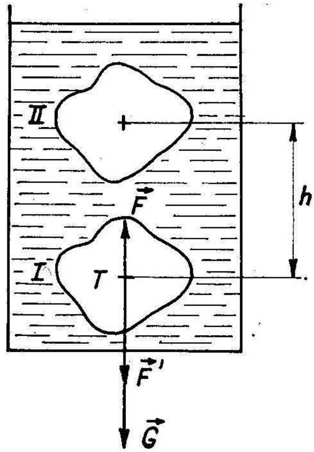
Nejstarším důkazem tohoto druhu je patrně *myšlenkový důkaz Stevinův* (1548 až 1620). Ve starších učebnicích pro naše střední školy se Archimédův zákon dokazoval v podstatě stejným způsobem jako jej dokazoval *Stevin*. Kdyby v nádobě s kapalinou určitá libovolná část kapaliny o hmotnosti m ztuhla, aniž by změnila svůj tvar a objem (obr. 4), nedošlo by k změ-



Obr. 4

ně mechanické energie soustavy »kapaliny + těleso«, a proto by se rovnovážný stav této soustavy neporušil. Protože však ztuhlá část kapaliny je samostatným tělesem, působí na ni homogenní tíhové pole silou o velikosti $G' = m\,g$. Protože však zůstává v kapalině v rovnovážně poloze, musí na ni působit vztlaková síla $\mathbf{F} = \mathbf{G}$ o stejné velikosti, ale opačné orientace než má síla $\mathbf{G}$. Kdyby se nyní nahradila ztuhlá část kapaliny libovolným jiným tělesem shodného tvaru a objemu se ztuhlou částí kapaliny, avšak jiné hustoty než má kapalina, muselo by být i toto těleso nadlehčováno stejnou silou o velikosti $F = G'$ jako původní ztuhlá část kapaliny a tedy i kapaliny ve stavu tekutém. neboť se předpokládalo, že při tuhnutí kapalina nezměnila svůj objem. Z tohoto myšlenkového pokusu vychází formulace (B) Archimédova zákona. Jsou-li myšlenkové důkazy odvozeny logicky správně ze správných předpokladů, jsou důkazy dostačujícími. Přes to však bývají často přijímány s nedůvěrou, zvláště tehdy, když některý z předpokladů se nedá dokázat. Proto pokládám Stevinův důkaz za méně vhodný, než je důkaz přímým užitím zákona zachování a přeměny mechanické energie, který je velmi jednoduchý.

Je-li těleso o objemu V', o tíze G, ponořeno zcela v kapalině v poloze I (obr. 5), působí na ně ve směru svislém dolů síla o velikosti $F' = G - F$. Zvedne-li se těleso působením vnější síly z polohy I do polohy II, zvýší



Obr. 5

se jeho poloha o výšku h a opuštěné místo po tělese zaujme kapalina stejného objemu V', jako má těleso. Potenciální energie tíhová tělesa se při tomto přemístění zvětší o $\Delta_1 W = G\,h$, potenciální tíhová energie kapaliny v nádobě se však zmenší o hodnotu $\Delta_2 W = G'h$, kde G' značí tíhu kapaliny téhož objemu jako má těleso. Celkové zvýšení potenciální tíhové energie soustavy »kapalina + těleso« je

$$\Delta W = (G - G')\,h.$$

Při zvedání tělesa rovnoměrným pohybem po dráze h se vykoná působením vnější síly práce

$$A = F'h = (G - F)\,h.$$

Protože při tomto ději nastala jen změna potenciální energie tíhové soustavy »kapalina + těleso«, je velikost vykonané práce rovna této změně potenciální tíhové energie soustavy. Platí tedy $A = \Delta W$ takže,

$$F = G' = V'\varrho' g.$$

Těleso zcela ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která se rovná tíze kapaliny téhož objemu V' jako má ponořené těleso. Předpokládejme nyní, že těleso je ponořeno v kapalině jen částí V svého objemu. Pak je nadlehčována přímo jen část V objemu tělesa, ponořená v kapalině. Protože však je tato ponořená část tělesa pevně spojena s částí neponořenou, nadlehčuje celé těleso vztlaková síla o velikosti

$$F = V\varrho' g, \tag{3}$$

působící na ponořenou část V objemu tělesa. Tím je dokázána formulace (B) Archimédova zákona.

Zda se má velikost vztlakové síly, kterou působí kapalina na ponořené těleso vypočítat z působení tlakových sil vyvolaných hydrostatickými tlaky kapaliny na ponořené těleso nebo užitím zákona zachování mechanické energie, je sporné. Oba způsoby mají své přednosti a vady. Důkaz užitím zákona zachování energie je obecný, nevysvětluje však bezprostřední příčinu, proč je těleso nadlehčováno. Tato příčina se dobře vysvětlí účinkem sil, vyvolaných hydrostatickými tlaky kapaliny, je však nemožno tímto způsobem odvodit Archimédův zákon obecně. Protože oba způsoby jsou jednoduché a dají se snadno dokázat a také nevyžadují příliš času, doporučuji provést nejprve obecný důkaz užitím zákona zachování energie a potom také tak, jak je odvozen v učebnici fyziky pro I. roč. střední všeobecně vzdělávací školy.

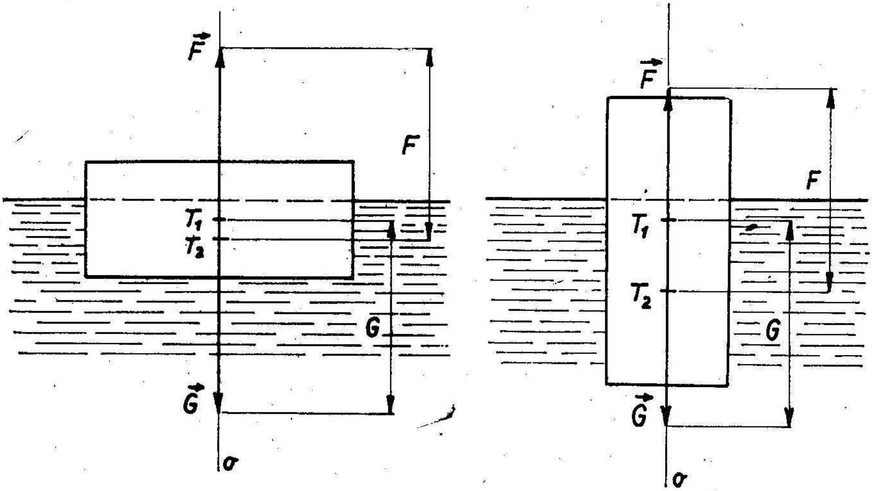
Nepůsobí-li na soustavu těles »kapalina + těleso« žádná jiná síla než tíhová síla, pak působiště T_1 tíhové síly $\mathbf{G}$ tělesa (těžiště tělesa) a působiště T_2 vztlakové síly $\mathbf{F}$ (těžiště ponořené části tělesa) leží na společné, svislé přímce a těleso se v kapalině pohybuje posuvným rovnoměrně zrychleným pohybem bez otáčení působením stálé síly o velikosti $F' = |G - F|$. Je-li $G > F$, klesá těleso ke dnu nádoby, je-li $G < F$, stoupá vzhůru a vynoří se z kapaliny takovou částí svého objemu, že tíhová síla $\mathbf{G}$ je v rovnováze se vztlakovou silou $\mathbf{F}$. Je-li těleso ponořeno v kapalině a jeho tíha G je rovna vztlakové síle F, má těleso v kapalině rovnovážnou polohu.

3. Rovnovážný stav soustavy »kapalina + těleso«

Působí-li na soustavu těles »kapalina + těleso« jen síly stejnorodého tíhového pole, může mít těleso ponořené v kapalině jednu ze tří rovnovážných poloh, stálou, volnou nebo vratkou. Závisí to na vztahu mezi průměrnou hustotou ϱ tělesa a hustotou ϱ' kapaliny. Hustotu kapaliny pokládáme za stálou.

Těleso ponořené v kapalině má stálou rovnovážnou polohu tehdy, jestliže soustava »kapalina + těleso« má za daných podmínek nejmenší potenciální energii tíhovou. Těžiště soustavy je pak v nejnižší možné poloze. Vychýlíme-li těleso z této polohy, vrátí se po uvolnění do původní polohy. Těleso ponořené v kapalině má rovnovážnou polohu volnou, jestliže se potenciální tíhová energie soustavy »kapalina + těleso« při vychýlení tělesa nezmění. Je-li v daných podmínkách potenciální tíhová energie soustavy největší, má těleso ponořené v kapalině rovnovážnou polohu vratkou. Těžiště soustavy je pak v nejvyšší poloze. Po menším vychýlení tělesa z jeho polohy se nevrátí těleso do původní polohy, ale zaujme jinou, stálou rovnovážnou polohu.

Je-li průměrná hustota ϱ tělesa o objemu V větší než hustota ϱ' kapaliny ($\varrho > \varrho'$), má vztalková síla působící na ponořené těleso menší hodnotu $F = V\varrho' g$ než je tíha tělesa $G = V\varrho g$ a těleso klesá ke dnu. Je-li těleso na dně nádoby, má soustava nejmenší potenciální tíhovou energii a těleso je v rovnovážné poloze stálé. Je-li $\varrho' = \varrho$, je vztlaková síla **F** v rovnováze s tíhovou silou **G** a soustava je v rovnovážném stavu v každé poloze tělesa. Těleso se v kapalině vznáší v rovnovážné poloze volné. Je-li $\varrho < \varrho'$, těleso stoupá k povrchu kapaliny a zůstává v ní ponořeno takovou částí V_1 svého objemu, že vztlaková síla **F** o velikosti $F = V_1 \varrho' g$ je v rovnováze s tíhou **G** tělesa. Těleso plove na kapalině.



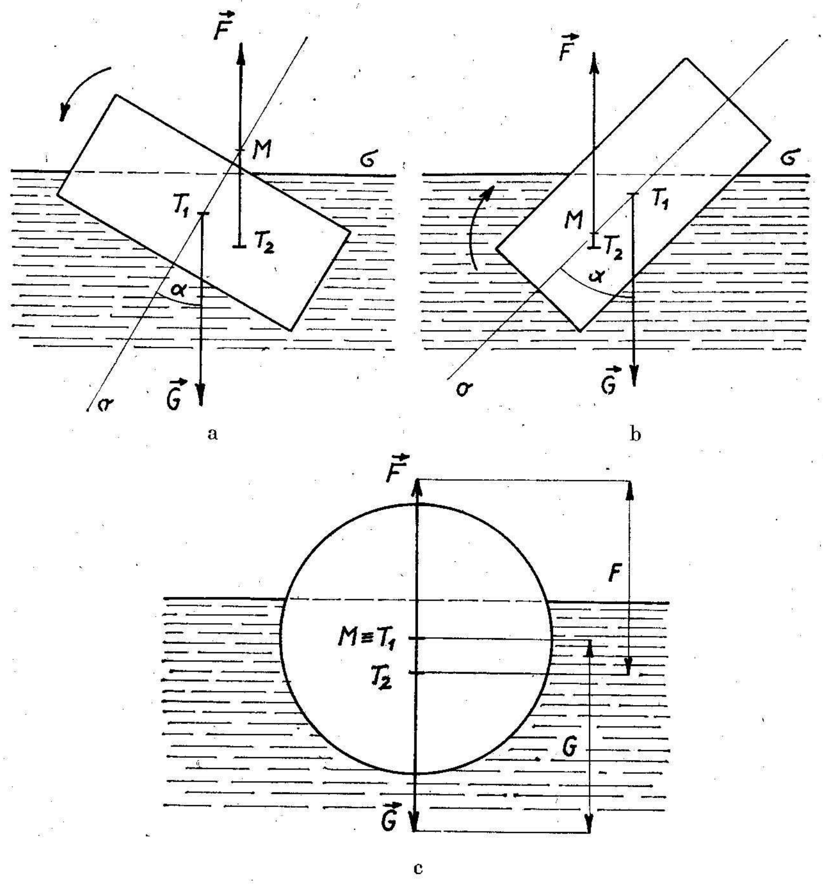
a b

Obr. 6

Při plování působí tíhová síla **G** tělesa v těžišti T_1 tělesa a síla **F** má působiště v těžišti T_2 té části tělesa, která je ponořena v kapalině. Přímka o procházející body T_1 a T_2, jsou-li při plování svisle nad sebou, se nazývá osa plování. Má-li osa plování svislou polohu (obr. 6a, 6b), mají stejně veliké síly **G** a **F** v téže vektorové přímce opačnou orientaci, a proto jsou v rovnováze. Soustava je v rovnovážném stavu.

Obr. 6a, 6b, 7a, 7b, 7c zobrazují řez soustavy »kapalina + těleso« svislou rovinou τ, procházející body T_1 a T_2. V rovině τ je osa o plování i metacentrum M. Metacentrum je bod, ve kterém se protíná vektorová přímka vztlakové síly **F** s osou plování, vychýlenou ze svislé polohy.

V situaci naznačené na obr. 6a je těžiště T_1 tělesa za daných okolností blíže k povrchu zemskému než v kterékoli jiné poloze. Proto je v nejnižší poloze i těžiště T soustavy. Soustava má za daných okolností nejmenší



Obr. 7

potenciální energii tíhovou a těleso je v rovnovážné poloze stálé. Nakloníme-li těleso tak, že osa plování je odchýlena v rovině τ od svislého směru o úhel α (obr. 7a), pak dvojice sil **F** a **G**, působících na těleso v bodech T_2 a T_1, vrátí těleso do původní polohy. Má-li těleso stálou rovnovážnou polohu, je při vychýlení osy plování ze svislého směru metacentrum nad těžištěm T_1 tělesa (obr. 7a).

V poloze naznačené na obr. 6b je těžiště T_1 tělesa a tedy i těžiště T soustavy v poloze za daných okolností nejvyšší a potenciální tíhová energie soustavy je největší. Proto má těleso rovnovážnou polohu vratkou. Jestliže vychýlíme těleso tak, aby se osa plování naklonila v rovině τ o úhel α, potom dvojice sil **F** a **G** zvětšuje tuto odchylku a plovoucí těleso nezaujme po uvolnění původní vratkou rovnovážnou polohu, ale převrátí se do jiné rovnovážné polohy, odchýlené v rovině τ od původní polohy o úhel 90 °. Nová rovnovážná poloha je stálá. Tento případ nastane vždy, když je metacentrum pod těžištěm T_1 tělesa (obr. 7b).

Splyne-li metacentrum M s těžištěm T_1 tělesa, má těleso plovoucí na kapalině rovnovážnou polohu volnou. Příkladem je válec plovoucí v kapalině tak, že jeho podélná osa je vodorovná, nebo plovoucí koule (obr. 7c).

Rovnovážnou polohu vratkou má také těleso, jehož průměrná hustota ϱ je menší než hustota ϱ' kapaliny, jestliže je přitisknuto svou podstavou ke dnu nádoby tak, že mezi podstavu tělesa a dno nádoby nemůže voda vniknout. Pak je těleso stále přitlačováno ke dnu nádoby silou, vyvolanou hydrostatickými tlaky kapaliny, a neoddělí se ode dna nádoby, pokud mezi ně a podstavu tělesa nevnikne kapalina. Jde tu zřejmě o rovnovážnou polohu vratkou, protože potenciální tíhová energie soustavy je v tomto případě za daných okolností největší, neboť u dna nádoby je těleso, jež má menší tíhu než je tíha kapaliny, stejného objemu jako má ponořené těleso. Pokusně se dá tento stav ukázat, jestliže přitiskneme ke dnu nádoby zabroušenou skleněnou desku nebo polokouli se zabroušenou podstavou a do nádobky potom nalijeme opatrně rtuť.