

Tematické okruhy

k magisterské státní závěrečné zkoušce

z matematiky a didaktiky matematiky

programu

Učitelství matematiky pro základní školy

platné pro termíny SZZ od termínu JARO 2024

Katedra matematiky PdF MU Brno

Státní závěrečná magisterská zkouška v navazujícím magisterském studiu učitelství matematiky pro ZŠ je pouze ústní. Student si vylosuje z každého níže uvedeného oddílu jednu otázku (na přípravu každé otázky bude cca 15 minut):

- Matematika (matematická analýza, algebra, geometrie, teorie množin)
- Didaktika matematiky

Při zkoušce bude studentovi zadáno z oddílu **Matematika** jen hlavní téma (je zde tučným fontem). Uvedené detailní požadavky slouží jen jako vodítko při vašem studiu. Nelze je v žádném případě brát jako dogma. Očekává se vlastní přístup k tomu, co všechno a jakým způsobem lze v souvislosti s jednotlivými tématy zmínit.

Důraz se klade zejména na souvislosti mezi tématy, přičemž zde nemáme na mysli jen témata jednoho oboru. Je žádoucí ilustrovat teorii vhodnými příklady (a protipříklady). Velmi vítány jsou motivační úvahy pro diskutované pojmy. **Můžete využít i své znalosti historických souvislostí vývoje matematiky a vyučování matematice.**

Pokuste se i o intuitivní pohled na některá témata; dále o využití či interpretaci pojmu optikou žáka ZŠ či SŠ.

U každé otázky v rámci části **Didaktika matematiky** lze pojednat (je-li to možné a vhodné) o mezipředmětových vztazích (zejména s ohledem na druhý aprobační předmět), o vztahu daného tématu k jiným a o problematických partiích daného tématu. Výklad lze vhodně doplnit historickými a dalšími relevantními poznámkami. V rámci výkladu před zkoušejícími (nikoliv však při přípravě) smí studující využít svého portfolia.

Ke každé otázce si studující vylosuje jeden ze čtyř příkladů vztahujících se k dané problematice. U zkoušky předvede vzorové řešení příkladu a pojedná o jeho kritických místech včetně toho, jak s nimi lze pracovat.

Matematika

M1. Reálné funkce jedné i více reálných proměnných

Definice funkce. Vlastnosti funkcí (monotonie, omezenost, konvexita, skládání, inverze atd., ale i např. spojitost a chování v ryzím okolí bodu). Grafy funkcí a jejich „transformace“. Využití řezů rovinami u grafů funkce více proměnných. Vyšetřování vlastností (včetně vyšetřování průběhu funkce, hledání extrému, což zahrnuje i využití diferenciálního počtu). Základní elementární funkce. Elementární funkce. Alternativní možnosti definice některých elementárních funkcí (pomocí integrálu „jednodušších“ funkcí, mocninných řad, diferenciálních rovnic — diskutujte takto např. logaritmus, sinus a exponenciálu) atd.

M2. Limita funkce jedné i více proměnných a limita posloupnosti

Definice limity. Pojem (ryzího) okolí. Intuitivní chápání limity a popis pomocí vhodného obrázku, výpočet, vlastnosti. Kde všude jsme limity potkali/využili (definice spojitosti, definice derivace, asymptoty, limitní přechod u integrálních součtů s nulovou posloupností dělení či zavedení Jordanovy míry, definice nevlastních integrálů, součty a konvergence/divergence nekonečných řad — definice i kritéria, poloměr konvergence, hromadný bod, limita superior, limita inferior) atd.

M3. Derivace

Derivace funkce jedné proměnné. Parciální derivace. Geometrická a fyzikální motivace či interpretace. Vlastnosti, výpočet, vztahy s jinými pojmy (např. se spojitostí). Kde všude jsme derivaci potkali/využili (extrémy, průběh funkce, L'Hospitalovo pravidlo, tečna, tečná rovina, věty o střední hodnotě — lze je využít mj. při odhadech, diferenciál, Taylorův polynom, funkční řady, primitivní funkce, diferenciální rovnice) atd.

M4. Neurčitý integrál

Definice. Geometrická interpretace. Vlastnosti. Metody výpočtu (vč. zmínky o použití různých triků využitelných nejen zde, jako např. přičtení nuly, vynásobení jedničkou, rozklad na parciální zlomky, goniometrické identity, doplnění na čtverec). Kde všude jsme neurčitý integrál potkali/využili (Reimannův integrál, diferenciální rovnice — předvedte metodu řešení na nějakém konkrétním typu diferenciální rovnice, funkční posloupnosti a řady). Zdůvodnění některých typických integračních postupů (např. linearita, per partes, substituce) atd.

M5. Reimannův integrál

Motivace, konstrukce, vlastnosti, výpočet. Souvislost s neurčitým integrálem, souvislosti s nekonečnými řadami, souvislost s Jordanovou mírou. Využití v geometrii a příp. ve fyzice (rozumět myšlence odvozování příslušných vzorců, např. jak dostaneme integrální součty při hledání objemu rotačního tělesa aj.). Přibližný výpočet integrálu (mocninné řady nebo s použitím myšlenek z konstrukce). Alternativní způsob zavedení některých funkcí (integrál jako funkce horní meze) atd. Nevlastní integrály.

M6. Posloupnosti a řady

Číselné i funkční posloupnosti. Číselné i funkční řady. Vlastnosti, limita, součet, speciální a významné typy posloupností či řad. Bodová vs. stejnoměrná konvergence (přenášení vlastností funkcí na limitní funkci či součet funkční řady). Souvislost řad s určitými integrály. Alternativní způsob zavedení některých funkcí (mocninné řady). Aplikace (aproximace funkcí, přibližný výpočet funkčních hodnot, přibližný výpočet integrálů) atd.

M7. Aplikace diferenciálního a integrálního počtu

Vyšetřování vlastností funkcí (monotonie, konvexita aj.). Extremální úlohy (vč. slovních úloh a jejich převedení do řeči matematiky). Geometrie (tečna, tečná rovina, obsah, objem, délka křivky, povrch, ale třeba i určování vzdáleností). Aproximace funkce, přibližný výpočet funkčních hodnot. Modelování pomocí diferenciálních rovnic (fyzika, biologie aj.) — rovnice lineární, separovatelné, 1. i 2. řádu atd.

M8. Binární relace a jejich vlastnosti

Kartézský součin, binární relace, vlastnosti relací, grafy binárních relací. Relace zobrazení, uspořádání, ekvivalence, příklady těchto relací.

M9. Algebraické struktury s jednou a dvěma operacemi

Pojem binární algebraické operace, vlastnosti, algebraické struktury s jednou operací (grupoid, pologrupa, grupa) a jejich homomorfismy. Algebraické struktury se dvěma operacemi (polookruh, okruh, obor integrity, těleso), jejich homomorfismy.

M10. Vektorové prostory, lineární zobrazení.

Podprostory vektorového prostoru. Lineární kombinace vektoru, lineární závislost a nezávislost vektoru. Báze a dimenze vektorového prostoru. Souřadnice vektoru v dané bázi. Věta o dimenzi součtu a průniku podprostorů. Lineární zobrazení vektorových prostorů. Lineární transformace a její matice. Hodnost a defekt lineární transformace. Konjugované (podobné) matice. Vlastní vektory a vlastní hodnoty lineární transformace.

M11. Matice a determinanty, soustavy lineárních rovnic

Typ matice, algebra matic, okruh matic nad tělesem reálných čísel, hodnost matice, inverzní matice. Determinanty, rozvoj determinantu podle řádku či sloupce (Laplaceova věta). Homogenní a nehomogenní soustavy lineárních rovnic a jejich řešitelnost, Frobeniova věta. Metody řešení.

M12. Eukleidovský vektorový prostor

Definice skalárního součinu a jeho vlastnosti. Velikost vektoru, Cauchyova-Bunjakovského nerovnost. Odchylka vektoru, Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces. Ortogonální zobrazení, ortogonální transformace.

M13. Polynomy, řešení algebraických rovnic

Definice polynomu, operace s polynomy. Kořeny polynomu, rozklad polynomu na kořenové činitele, největší společný dělitel a nejmenší společný násobek polynomů. Základní věta algebry. Algebraické rovnice a jejich řešení. Binomické a reciproké rovnice. Polynomy více proměnných, symetrické polynomy.

M14. Konstrukce číselných oborů

Peanova aritmetika přirozených čísel. Vnoření polookruhu přirozených čísel do okruhu celých čísel. Vnoření okruhu celých čísel do tělesa racionálních čísel. Pojem řezu v množině, druhy řezů. Řezy v množině racionálních čísel. Iracionální čísla, jejich sčítání a násobení. Vnoření tělesa racionálních čísel do tělesa reálných čísel. Rozšíření tělesa reálných čísel na těleso komplexních čísel. Operace s komplexními čísly. Uspořádání číselných oborů.

M15. Klasická konstrukční geometrie

Axiomy eukleidovské geometrie (axiomy a postuláty Eukleidovy a Hilbertovy). Eukleidovské konstrukce a sestrojitelné veličiny (geometrická algebra, charakterizace sestrojitelných veličin). Klasické konstrukční úlohy a využití

geometrických zobrazení při jejich řešení (např. kvadratura obecného mnohoúhelníku, konstrukce pravidelných mnohoúhelníků, dotykové úlohy).

M16. Zobrazovací metody

Středová a rovnoběžná promítání, vlastnosti a přehled zobrazovacích metod (volná promítání, Mongeovo promítání, axonometrie, perspektiva). Zobrazení základních těles (pravidelná tělesa, obecné hranoly, kužely apod.). Základní polohové a metrické úlohy (např. průniky přímky a roviny, vzdálenosti bodů, konstrukce řezů).

M17. Afinní a projektivní geometrie

Obecný afinní a projektivní prostor (motivace projektivního rozšíření, algebraické definice). Pojmy incidence, uspořádání a rovnoběžnosti. Vzájemné polohy podprostorů (incidence, různoběžnost, resp. rovnoběžnost, mimoběžnost). Konstrukce a analytická vyjádření (např. průniky a součty podprostorů, příčky). Využití lineární algebry při řešení základních úloh (soustavy lineárních rovnic, determinanty).

M18. Eukleidovská geometrie

Obecný eukleidovský prostor (klasický vs. algebraický přístup). Pojem shodnosti. Kolmost, vzdálenost a odchylka podprostorů, objemy rovnoběžnostěnů (definice v rovině a v prostoru a jejich zobecnění). Konstrukce a analytická vyjádření (např. kolmé podprostory, osy). Využití lineární algebry při řešení základních úloh (determinanty, skalární, vnější a vektorový součin).

M19. Geometrická zobrazení

Shodná, podobná, afinní, projektivní a konformní zobrazení (definice, vlastnosti a analytická vyjádření). Základní zobrazení a jejich skládání, transformační grupy (zejména pro transformace v rovině). Užití při řešení geometrických úloh (např. u Apollóniových úloh nebo řezu těles).

M20. Množiny a kardinální čísla. Uspořádané množiny a ordinální čísla

Ekvivalentní množiny a jejich mohutnost. Definice kardinálního čísla, součet, součin a mocnina kardinálních čísel. Spočetné a nespočetné množiny, mohutnost kontinua. Uspořádání kardinálních čísel, Cantorova–Bernsteinova věta. Budování přirozených čísel jako čísel kardinálních. Uspořádané a dobře uspořádané množiny. Ordinální typy, ordinální čísla a jejich aritmetika. Uspořádání ordinálních čísel. Budování přirozených čísel jako čísel ordinálních.

Didaktika matematiky

DM 1. Individuální přístup k žákům, zájmová činnost v matematice

Vzdělávání žáku vzhledem k jejich specifickým vzdělávacím potřebám. Péče o žáky s problémy v matematice, vzdělávání žáků s poruchami učení, vzdělávání žáků talentovaných. Matematické soutěže, zájmová činnost.

DM 2. Obsah kurzu školské aritmetiky. Posupné rozšiřování číselného oboru (čísla přirozená, celá, racionální)

Přirozená čísla, jejich zavedení na základní škole. Numerace, operace s přirozenými čísly, vlastnosti operací. Čísla celá, zlomky, čísla racionální, numerace, operace.

DM 3. Elementární teorie čísel, dělitelnost v oboru přirozených čísel. Využití induktivních a deduktivních metod na základní škole

Výuka dělitelnosti na ZŠ, zavádění základních pojmů. Metody určování nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele daných přirozených čísel, kritéria dělitelnosti a jejich důkazy. Prvočísla, čísla složená. Řešení diofantických rovnic prvního stupně.

DM 4. Číselné obory. Intuitivní zavedení reálných čísel na základní škole. Mocniny a odmocniny

Možnosti zavedení reálných čísel na základní škole. Iracionální čísla, s nimiž se ve výuce matematiky setkávají žáci na základní škole. Pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami. Geometrické konstrukce a algebraické výrazy.

DM 5. Základní pojmy finanční matematiky

Procentový počet, jednoduché a složené úrokování. Možnosti využití skupinové a projektové výuky v tématu finanční gramotnost.

DM 6. Matematická slovní úloha a její řešení

Metody řešení matematických slovních úloh. Fáze řešení slovní úlohy. Strategie řešení: experiment, aritmetické řešení, algebraické řešení. Význam geometrického znázornění při rozboru úlohy.

DM 7. Vytváření představ a pojmu v matematice

Žákův poznávací proces ve výuce matematiky. Různé pedagogicko-psychologické teorie žákova poznávacího procesu. Možnosti zavádění nových pojmů ve výuce matematiky, rozdíly v transmisivním a konstruktivistickém přístupu. Ověřování vět prostředky žáka základní školy. Matematický důkaz.

DM 8. Rovnice a nerovnice ve školské matematice. Lineární rovnice a nerovnice, soustavy lineárních rovnic, neurčité rovnice

Způsoby řešení lineárních rovnic a nerovnic, soustav lineárních rovnic a neurčitých rovnic na základní škole. Ekvivalentní úpravy rovnic a nerovnic.

DM 9. Rovnice. Kvadratická rovnice, rovnice s neznámou ve jmenovateli

Druhy kvadratických rovnic. Určení kořenu kvadratické rovnice. Vietovy vzorce. Ekvivalentní a důsledkové úpravy.

DM 10. Elementární funkce v učivu matematiky základní školy

Lineární funkce, funkce nepřímá úměrnost. Využití metod zobecňování a abstrakce při vyvozování pojmu lineární funkce. Způsoby zadání funkcí. Vlastnosti funkcí.

DM 11. Kvadratická funkce. Funkce racionální lomená

Metodika zavedení kvadratické funkce. Funkce racionální lomená. Zakreslení grafu. Vlastnosti funkcí. Mezipředmětové vztahy — využití v příkladech z fyziky.

DM 12. Goniometrické funkce

Využití podobnosti pro zavedení goniometrických funkcí v intervalu. Goniometrické funkce v intervalu. Jednotková kružnice. Vlastnosti goniometrických funkcí.

DM 13. Planimetrie v kurzu školské matematiky

Přístupy k zavádění planimetrických pojmů na základní škole. Úhel, trojúhelník, čtyřúhelník, kružnice, kruh. Vlastnosti těchto útvarů. Axiomatická výstavba geometrie.

DM 14. Konstrukční úlohy v kurzu školské matematiky

Základní geometrické konstrukce. Fáze řešení konstrukční úlohy. Řešení konstrukčních úloh s využitím základních vět o určenosti útvaru, množin bodů s danou vlastností, geometrických zobrazení. Konstrukce na základě algebraických výrazů.

DM 15. Geometrická zobrazení v kurzu školské matematiky

Shodná zobrazení: osová souměrnost, středová souměrnost, rotace, translace. Podobná zobrazení: podobnost, stejnoolehlost. Využití manipulativních činností k vyvození jednotlivých zobrazení.

DM 16. Stereometrie na základní škole

Postupné zavádění pojmů manipulativními činnostmi. Rozvíjení prostorové představivosti. Mnohostěny, rotační tělesa. Pravidelná tělesa.

DM 17. Míry geometrických útvarů

Délka úsečky, obvod a obsah rovinného geometrického útvaru. Povrch a objem tělesa, odvození vztahů.

DM 18. Elementární kombinatorické úlohy a jejich využití v učivu matematiky 2. stupně ZŠ. Prvky teorie grafů a jejich využití

Úlohy k rozvoji kombinatorického myšlení na základní škole. Strategie řešení kombinatorických úloh. Hledání kostry grafu, jednotažky.

DM 19. Pravděpodobnost a statistika ve školské matematice

Základní pojmy matematické statistiky. Rozvoj pravděpodobnostního myšlení. Možnosti využití projektové výuky a mezipředmětových vztahů.

DM 20. Historie matematiky z hlediska didaktiky matematiky

Historická období ve vývoji matematiky, významné výsledky. Analogie v historickém vývoji matematiky a vývoji představ žáků o matematických pojmech v průběhu školního vzdělávání.