Rozvoj matematických schopností a myšlení u nadaných žáků 6. a 7. ročníku základní školy: metodika

Irena Budínová
Jitka Panáčová
Jana Veseláková
Petra Antošová

Pedagogická fakulta MU, 2024

Děkujeme paní učitelce a jejím žákům, díky nimž jsme měly možnost zrealizovat kroužek pro nadané žáky a vytvořit tuto metodiku.

Obrázek na úvodní straně byl vytvořen umělou inteligencí ChatGPT. Obrázky v pracovních listech byly vytvořeny v programech mathigon.org, blender.org a GeoGebra.

Vzdělávání nadaných žáků

Vzdělávání nadaných žáků může být pro učitele velkou výzvou. V posledních letech vnímáme snahu mnoha škol věnovat se nadaným žákům. Existují různé modely vzdělávání nadaných žáků, které jsou školami prověřovány. Některé probíhají formou vnější diferenciace, kdy jsou žáci rozřazováni podle výkonu do škol, případně do specializovaných tříd. Druhou možností je práce s nadanými žáky v rámci vnitřní diferenciace, kdy se učitel zaměřuje na jednotlivé žáky a jejich potřeby individuálně a nabízí jim různé aktivity a materiály v rámci celé třídy. Ze zkušeností, které jsme získaly při práci s učiteli a školami, je možné konstatovat, že oba modely jsou pro učitele výzvou a kladou na ně požadavek zvýšené aktivity při přípravě na hodiny.

V této metodice se zabýváme řešením úloh matematicky nadanými žáky. Aby bylo možné s nadaným žákem smysluplně pracovat, je dobré vědět, čím se liší od žáků tzv. běžných. Matematicky nadaní žáci mají speciální schopnost efektivně využívat matematických poznatků a originálně řešit matematické úlohy. Toto přirozené nadání však potřebuje být rozvíjeno prostřednictvím vhodných zkušeností a příležitostí (Dimitriadis, 2012).

Vhodné matematické vzdělávání nadaných žáků se zaměřuje zejména na roli učení (Koshy, 2001, Sheffield, 2003). Efektivní výuka matematiky pro nadané žáky by se měla zaměřovat na učení matematiky na vyšších kognitivních úrovních, na vytváření pozitivních přesvědčení, postojů a motivace. Svoji roli také hraje organizační forma výuky, jako je akcelerace a prohlubování učiva či diferenciace výuky. Díky těmto formám může docházet k prohlubování či rozšiřování poznatků žáků (Dimitriadis, 2012). Žáci dostávají příležitost zabývat se kognitivně náročnějšími činnostmi, které vyžadují přemýšlení na vyšší úrovni, jako je obhajování postupů, vytváření hypotéz, komunikace, rozhodování, zdokonalování nápadů, vytváření nových a originálních myšlenek, řešení problémů a metakognice (Koshy, 2001). Dalšími dovednostmi, které jsou pro nadané žáky potřebné, jsou dovednosti pro sebehodnocení a seberegulaci (Koshy, 2001). Ty jsou důležité pro plánování, monitorování a hodnocení vzdělávací aktivity (Schoenfeld, 1992).

Jedním z modelů, který umožňuje popsaný způsob péče o nadané žáky, je vytváření speciálních skupin pro nadané žáky, například formou po-školních volnočasových kroužků. Při vytváření rámce pro výuku nadaných žáků lze přitom vycházet z Bloomovy taxonomie vzdělávacích cílů (Bloom, 1956). Takový rámec není založený na strukturovaném seskupování žáků v rámci výuky matematiky nebo na zadávání velkého množství obtížných hádanek a problémů, ale na vedení žáka ve schopnosti

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

vyššího řádu myšlení, které žáky kultivuje k tomu, aby našli co nejvíce možných řešení, vytvářeli hypotézy, hodnotili svá pozorování a diskutovali svá zjištění.

Bloomova taxonomie kognitivních cílů

V roce 1956 byla publikována taxonomie kognitivních cílů, jejímž autorem byl Benjamin S. Bloom (1956). Jedná se o rámec klasifikace toho, co očekáváme nebo zamýšlíme od žáka, že se naučí a co tedy bude výsledek učebního působení. V roce 2001 proběhla revize Bloomovy taxonomie (Krathwohl, 2002).

Revidovaná Bloomova taxonomie má dvě dimenze: znalostní dimenzi a dimenzi kognitivního procesu.

Struktura znalostní dimenze v revidované Bloomově taxonomii je následující (Krathwohl, 2002, s. 214):

A) **Faktické znalosti** – základní poznatky, které žák musí mít, aby vyřešil danou úlohu.
   a) **Znalost terminologie.**
   b) **Znalost konkrétních detailů a postupů.**
B) **Konceptuální znalosti** – vzájemné vztahy mezi základními poznatky uvnitř širší struktury, které umožní vzájemnou funkčnost poznatků.
   a) **Znalosti vztahující se ke klasifikacím a kategorizacím.**
   b) **Znalosti principů a zobecňování.**
   c) **Znalosti teorií, modelů a struktur.**
C) **Procedurální znalosti** – jak něco provést; metody provedení, kritéria pro použití dovedností, algoritmů, technik a metod.
   a) **Znalosti dovedností a algoritmů pro konkrétní předmět.**
   b) **Znalosti technik a metod pro konkrétní předmět.**
   c) **Znalosti kritérií pro rozhodování použití vhodné procedury.**
D) **Metakognitivní znalosti** – znalosti poznávání, znalosti svého vlastního poznávání.
   a) **Znalosti strategií.**
   b) **Znalosti o kognitivních úkolech.**
   c) **Znalosti sebe sama.**

Struktura dimenze kognitivního procesu v revidované Bloomově taxonomii je následující (Krathwohl, 2002, s. 214):

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

1. **Zapamatovat si** – vybavit si relevantní znalosti z dlouhodobé paměti.
   1.1. **Poznávání.**
   1.2. **Vybavování.**
2. **Pochopit** – určení významu zadání, zahrnujícího ústní, písemnou a grafickou komunikaci.
   2.1. **Interpretace.**
   2.2. **Ilustrace.**
   2.3. **Klasifikace.**
   2.4. **Sumarizace.**
   2.5. **Vyvozování.**
   2.6. **Porovnávání.**
   2.7. **Vysvětlování.**
3. **Aplikovat** – provedení nebo použití určité procedury v dané situaci.
   3.1. **Provedení.**
   3.2. **Implementování.**
4. **Analyzovat** – rozdělení materiálu na jeho základní části a zjišťování, jak tyto části souvisí mezi sebou a s celkovou strukturou nebo účelem úlohy.
   4.1. **Diferenciace.**
   4.2. **Organizace.**
   4.3. **Přisuzování.**
5. **Vyhodnotit** – činit rozhodnutí na základě kritérií a standardů.
   5.1. **Kontrola.**
   5.2. **Kritické posouzení.**
6. **Tvořit** – dávat základní části dohromady pro vytvoření nového, koherentního celku nebo pro vytvoření originálního produktu.
   6.1. **Generování.**
   6.2. **Plánování.**
   6.3. **Produkování.**

Rozvoj metakognice u nadaných žáků

Metakognice je vnímána jako důležitá součást žákova rozvoje a poznávacího procesu. Můžeme ji popsat jako schopnost žáka monitorovat svoji aktuální úroveň porozumění danému tématu (Bransford et al., 2004). Žák se učí poznávat různé postupy, zvažuje jejich efektivitu, učí se vhodně volit řešitelské strategie, ale také se učí poznávat sám sebe, své silné a slabé stránky.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Metakognice sestává ze tří základních komponent: metakognitivních znalostí, metakognitivních zkušeností a metakognitivních dovedností (Lai et al., 2015). Součástí metakognice v matematice je schopnost verbalizovat a zapsat své myšlenkové pochody, nezapisovat pouze výsledky myšlenkové činnosti. Žáci, kteří jsou v matematice velice nadprůměrní, mohou mít právě v této oblasti značné mezery a může jim činit potíže předat své myšlenky někomu dalšímu. Se stoupající náročností a komplexností matematických úloh směrem k vyšším ročníkům ZŠ a následně SŠ může absence metakognice u žáků způsobovat zpomalení rozvoje jejich potenciálu.

Působením na žáky je možné docílit jejich většího uvědomění jejich myšlení, stejně jako větších znalostí o poznávání obecně (Pintrich, 2002). Podle Bransforda et al. (2004) mohou metakognitivní přístupy k výuce matematiky u žáků vést ke zvýšení stupně schopnosti přesunu k novým situacím bez potřeby explicitního pobídnutí.

Metakognitivní přístup dále zahrnuje kromě výše zmíněných tří základních komponent metakognitivní uvědomení, sebeuvědomení, sebereflexi a seberegulaci (Pintrich, 2002).

Metakognitivní znalosti zahrnují znalosti obecných strategií, které mohou být použity pro různé úlohy, znalosti podmínek, za kterých mohou být tyto strategie použity, znalosti obsahu, pro který jsou tyto strategie efektivní, a znalosti sebe sama.

Metakognitivní znalosti mohou hrát důležitou roli v tom, jak se žák učí, a potažmo v tom, jak je žák vyučován a posuzován ve třídě (Bransford et al., 2004). Může se jednat o různé aspekty učení, například jak pracovat s pamětí, jak si efektivně ukládat nové poznatky a navazovat je na již existující znalosti. Může se také jednat o orientaci v řešení úlohy, což souvisí s používáním strategií. Pokud žáci strategie neznají, nemohou je použít. Používají pak strategie nahodile podle toho, s čím se již seznámili a je jim známé, ale nedokážou mezi strategiemi dle potřeby pružně přecházet.

Znalosti sebe sama mohou být pro žáky usnadněním. Žáci, kteří znají své silné a slabé stránky, mohou nastavit své poznávání a myšlení, aby bylo více adaptivní pro rozdílné úkoly, tím tedy usnadňují učení.

Pokud chce učitel zahrnovat metokognitivní znalosti do své výuky, jedním z nejdůležitějších aspektů je explicitní označování těchto znalostí pro žáky. Jednou z možností je diskuse nad různými strategiemi, které žáci při řešení úlohy použili. Žáci tak mohou získávat nové zkušenosti, pozorovat řešení ostatních a konfrontovat je se svým vlastním řešením. Sdílený jazyk a rozmluva o kognici a učení mezi spolužáky a mezi učiteli a žáky pomáhá žákům uvědomovat si své vlastní metakognitivní znalosti stejně jako jejich vlastní strategie pro učení se a přemýšlení.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Na základě popsané teorie jsme vytvořily baterii pracovních listů s matematickými úlohami, které jsme zadávaly žákům šestého a později sedmého ročníku základní školy v rámci odpoledního matematického kroužku. Postup při práci se žáky, pracovní listy a výsledky žáků jsou popsány v následujících kapitolách.

Úlohy na rozvoj matematického myšlení a matematických dovedností

Vzorek žáků, se kterými se pracovalo

Pro kroužek rozvoje matematických dovedností byla vybrána 6. třída základní školy, která se zaměřuje na péči o nadané žáky. Jedná se o třídu výběrovou a žáci jsou do této třídy vybíráni na základě výkonu. Třída, která byla vybrána, má 29 žáků, kroužek však navštěvovalo 20 žáků, kteří byli navrženi učitelkou. Dva z těchto žáků byli odborně identifikováni pedagogicko-psychologickou poradnou jako mimořádně nadaní, ostatní odbornou identifikaci neměli, ačkoli učitelka uvedla, že někteří jsou velmi šikovní, zejména ve smyslu originálních nápadů a logického myšlení, a jako nadané by je označila.

Kroužek se konal ve dvou bězích, a to v průběhu roku 2024. První běh byl realizován během 12 týdnů v měsících duben–červen, žáci byli tou dobou v 6. ročníku. Druhý běh se uskutečnil opět ve 12 týdnech, v měsících září–prosinec, žáci byli v 7. ročníku.

Kroužek se konal v odpoledních hodinách po vyučování na základě zájmu žáka a souhlasu rodičů. Každá lekce trvala po dobu dvou vyučovacích hodin. V první hodině žáci řešili samostatně zadané úlohy, poté měli krátkou přestávku a pokračovalo se tím, že představovali svá různá řešení úloh. Záměrem této části bylo rozšíření jejich řešitelské zkušenosti a posílení metakognice. Žáci měli možnost se nás ptát v průběhu řešení na věci, kterým nerozuměli nebo pokud si nevěděli rady. V odpovědi jsme se je snažily postrčit správným směrem, nikoli prozradit postup řešení.

V prvním běhu jsme se se žáky seznamovaly, určovaly jsme pomocí vyhodnocování výsledků pracovních listů jejich matematické schopnosti a posuzovaly jsme způsoby, jakými přistupovali k řešení úloh. Tuto část lze považovat za pilotní a navedla nás na to, na jaké aspekty se v řešeních žáků budeme zaměřovat.

Ve druhém běhu jsme začaly vytvářet série úloh (vždy určité opakující se typy úloh zpravidla tři týdny po sobě) a úlohy jsme gradovaly podle úspěšnosti, kterou jsme průběžně vyhodnocovaly. Poslední úlohu jsme zadávaly tak, aby úkolem bylo vytvořit slovní zadání, jehož řešení bude obsahovat uvedený výpočet.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Zadání pracovních listů, jejich řešení a úspěšnost žáků

V této části představíme jednotlivé pracovní listy a posléze autorská řešení. Vzhledem k tomu, že řešení mnoha úloh existuje celá řada, uvádíme vždy jen jedno možné řešení, a to buď aritmetické, nebo řízený experiment vzhledem k tomu, že se jednalo o žáky 6. a posléze 7. ročníku. Výjimečně je uvedeno řešení algebraické.

Jednotlivé strategie nyní stručně představíme.

- **Strategie pokusu a omylu (neřízený experiment):** Tato strategie se vyznačuje nesystematickým experimentováním. Je to jednoduchý, ale ne vždy efektivní způsob, který může vést k výsledku až po mnoha pokusech, nebo může být i neúspěšný (Kopka, 2007).
- **Strategie systematického experimentování (řízený experiment):** Tato strategie zahrnuje provádění experimentů a následné zaznamenávání výsledků, které jsou často organizovány do tabulky, či jinak systematizovány. Tento přístup nám může pomoci odhalit zákonitosti daného problému (Kopka, 2007).
- **Aritmetická strategie:** Žák postupně provádí konkrétní početní operace, které ho krok za krokem vedou k výsledku (Budínová, 2018). Často je používána u úloh, kde lze zadání rozložit na dílčí výpočty, které jsou pro žáky srozumitelné.
- **Algebraická strategie:** řešení zahrnuje formalizaci problému pomocí rovnic nebo jiných algebraických struktur. Žák označí neznámé hodnoty symboly či písmeny a sestaví matematické rovnice, které následně řeší (Budínová, 2018).

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 1

Jméno: ____________________

1. Součet tří po sobě následujících přirozených čísel je 69. Urči tato čísla.

2. Dvojciferné číslo má ciferný součet 8. Zaměníme-li obě jeho číslice, dostaneme číslo o 36 větší než původní číslo. Které je původní číslo?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Chlapec má dvoukorunové a pětikorunové mince, celkem jich je 44. Mince mají dohromady hodnotu 136 korun. Kolik mincí bylo dvoukorunových a kolik pětikorunových?

4. Když se zeptali Anežky, kolik jí je let, odpověděla: „Za tři roky mi bude dvakrát tolik, jako mi bylo před pěti lety.“ Kolik je Anežce let?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL1

Úloha 1. Součet tří po sobě následujících přirozených čísel je 69. Urči tato čísla.

Řešení: $69 : 3 = 23$, prostřední číslo je 23, nejmenší je 22 a největší je 24.

Zkouška: $22 + 23 + 24 = 69$, jedná se o tři po sobě jdoucí přirozená čísla.

Odpověď: Jedná se o čísla 22, 23 a 24.

Úloha 2. Dvojciferné číslo má ciferný součet 8. Zaměníme-li obě jeho číslice, dostaneme číslo o 36 větší než původní číslo. Které je původní číslo?

Řešení: Řešíme řízeným experimentem. Vybereme např. číslo 35, které má ciferný součet 8. Číslo 53 je o 18 větší než 35. Zkusíme číslo 26, číslo 62 je o 36 větší než 25.

Odpověď: Původní číslo je 26.

Úloha 3. Chlapec má dvoukorunové a pětikorunové mince, celkem jich je 44. Mince mají dohromady hodnotu 136 korun. Kolik mincí bylo dvoukorunových a kolik pětikorunových?

Řešení: Spočítáme, jakou by měly mince hodnotu, kdyby byly všechny dvoukorunové: $44 \cdot 2 = 88$. Nyní zjistíme rozdíl oproti skutečné hodnotě, $136 - 88 = 48$. Na tuto částku zbývají vždy 3 koruny pětikorunové mince, tedy $48 : 3 = 16$ a pětikorunových mincí je 16. Dopočítáme dvoukorunové mince: $44 - 16 = 28$. Dvoukorunových mincí je 28.

Zkouška: $28 \cdot 2 + 16 \cdot 5 = 136$, $28 + 16 = 44$.

Odpověď: Dvoukorunových mincí bylo 28 a pětikorunových 16.

Úloha 4. Když se zeptali Anežky, kolik jí je let, odpověděla: „Za tři roky mi bude dvakrát tolik, jako mi bylo před pěti lety.“ Kolik je Anežce let?

Řešení: Řešíme řízeným experimentem. Kdyby bylo dnes Anežce 11 let, za tři roky jí bude 14 let, $14 : 2 = 7$, to je o 4 roky méně než 11 let.

Kdyby bylo dnes Anežce 13 let, za 3 roky 16 let, $16 : 2 = 8$, 8 let je o 5 let méně než 13 let a máme správné řešení.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Odpověď: Anežce je 13 let.

Výsledky v úlohách PL1

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 1 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 1. Číselné údaje (x/y) v tabulce u dvou nejčastěji zvolených strategií představují:

x – počet žáků, kteří uvedenou strategii pro řešení úlohy zvolili,
y – počet všech žáků, kteří řešili pracovní list.

Tabulka 1 Úspěšnost úloh v PL1

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
1/1	100	Aritmetická (10/18), pokus–omyl (6/18)
1/2	94	Pokus–omyl (9/18), řízený experiment (7/18)
1/3	83	Pokus–omyl (8/18), řízený experiment (5/18)
1/4	72	Pokus–omyl (7/18), aritmetická (6/18)

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

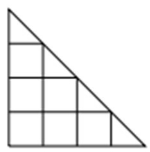
Pracovní list 2

Jméno: ____________________

1. Tříčlenná králičí rodina sní celkem 80 mrkví za týden. Maminka sní o 12 mrkví méně než tatínek. Malý králíček sní 14 mrkví. Kolik mrkví týdně sní tatínek?

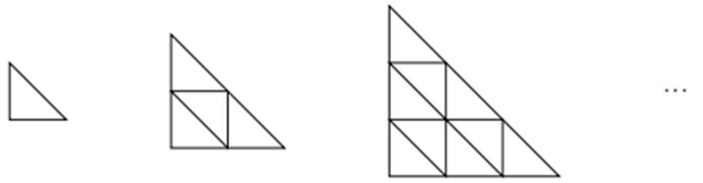
2. Vlaďka si napsala dvojciferné a trojciferné číslo. Jejich rozdíl je 986. Zapiš všechny možné součty čísel, která Vlaďka mohla zapsat.

3. Na obrázku je 7 čtverců. O kolik více je tam trojúhelníků?



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

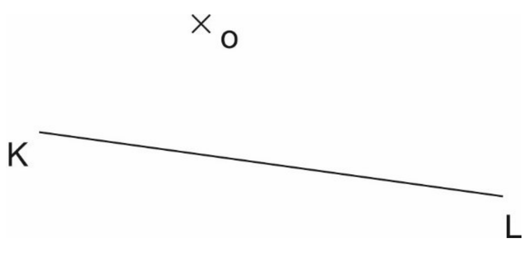
4. Je dána následující řada obrázků:



Na prvním obrázku vidíš 1 malý trojúhelník, na druhém 4 malé trojúhelníky atd. Kolik malých trojúhelníků bude na pátém obrázku?

5. V rovině leží úsečka KL a bod O, který je středem kružnice vepsané trojúhelníku KLM. Narýsuj trojúhelník KLM. Napiš postup konstrukce.

Postup konstrukce:



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL2

Úloha 1. Tříčlenná králičí rodina sní celkem 80 mrkví za týden. Maminka sní o 12 mrkví méně než tatínek. Malý králíček sní 14 mrkví. Kolik mrkví týdně sní tatínek?

Řešení: Malý králíček sní 14 mrkví, maminka s tatínkem tedy dohromady snědí 66 mrkví. Tatínek přitom sní o 12 mrkví více než maminka: $66 - 12 = 54$, $54 : 2 = 27$ (maminka sní 27 mrkví), $27 + 12 = 39$ (tatínek sní 39 mrkví).

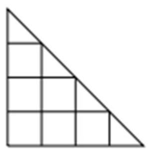
Zkouška: $39 + 27 = 66$, $39 - 27 = 12$, $66 + 14 = 80$

Odpověď: Tatínek sní týdně 39 mrkví.

Úloha 2. Vlaďka si napsala dvojciferné a trojciferné číslo. Jejich rozdíl je 986. Zapiš všechny možné součty čísel, která Vlaďka mohla zapsat.

Řešení: Možnosti dvojic čísel jsou 999 a 13, 998 a 12, 997 a 11, 996 a 10. Součty čísel jsou potom 1012, 1010, 1008 a 1006.

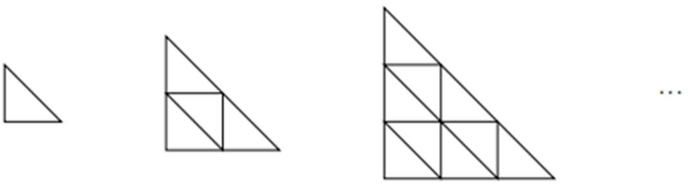
Úloha 3. Na obrázku je 7 čtverců. O kolik více je tam trojúhelníků?



Řešení: V obrázku jsou 4 malé trojúhelníky, 3 větší, 2 ještě větší a 1 celý trojúhelník. Celkově je tam 10 trojúhelníků, což je o 3 více nežli čtverců.

Odpověď: Na obrázku je trojúhelníků o 3 více než čtverců.

Úloha 4. Je dána následující řada obrázků:



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

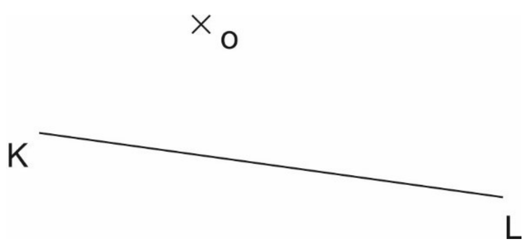
Na prvním obrázku vidíš 1 malý trojúhelník, na druhém 4 malé trojúhelníky atd. Kolik malých trojúhelníků bude na pátém obrázku?

Řešení: K prvnímu trojúhelníku jsme přidali 3 trojúhelníky, ke druhému 5 trojúhelníků, k 3. bychom přidali 7 trojúhelníků atd. Vidíme, že máme posloupnost lichých čísel 3, 5, 7, 9, ... Pátý obrázek by tak obsahoval 25 trojúhelníků.

Odpověď: Na pátém obrázku bude 25 trojúhelníků.

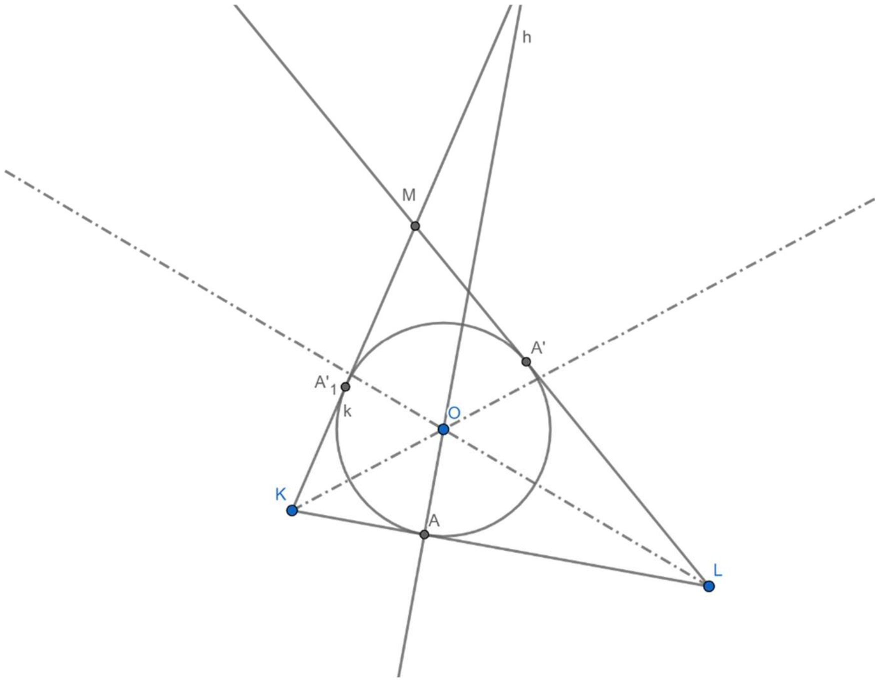
Úloha 5. V rovině leží úsečka KL a bod O, který je středem kružnice vepsané trojúhelníku KLM. Narýsuj trojúhelník KLM. Napiš postup konstrukce.

<u>Postup konstrukce:</u>



Rozbor: Střed kružnice vepsané leží na průsečíků os úhlů daného trojúhelníku. Polopřímky $\rightarrow KO$ a $\rightarrow LO$ jsou těmito osami úhlů. Bod A je průsečíkem kolmice h na přímku KL, která prochází bodem O, a úsečky KL. Body A' a A_1' jsou obrazy bodu A v osových souměrnostech podle os úhlů. Bod M je průsečíkem polopřímek $\rightarrow KA'$ a $\rightarrow KA_1'$.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy



Popis konstrukce:

1. $h; h \perp \leftrightarrow KL \ \wedge O \in h$
2. $A; A \in h \cap \leftrightarrow KL$
3. $\rightarrow LO$
4. $A'; O(LO): A \rightarrow A'$
5. $\rightarrow KO$
6. $A'_1; O(KO): A \rightarrow A'_1$
7. $\rightarrow LA', \rightarrow KA'_1$
8. $M; M \in \rightarrow LA' \cap \rightarrow KA'_1$
9. ΔKLM

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL2

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 2 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 2:

Tabulka 2 Úspěšnost úloh v PL2

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
2/1	93	Aritmetická (15/16), algebraická (1/16)
2/2	57	Aritmetická (15/16), jednou neřešeno
2/3	87	Dopočítávání trojúhelníků pomocí kreslení (12/16)
2/4	100	Dokreslení obrázku (7/16), nalezení obecné zákonitosti (5/16)
2/5	87	Nalezení tečen od oka (16/16), popis slovy (12/16), jinak žádný popis

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 3

Jméno: ____________________

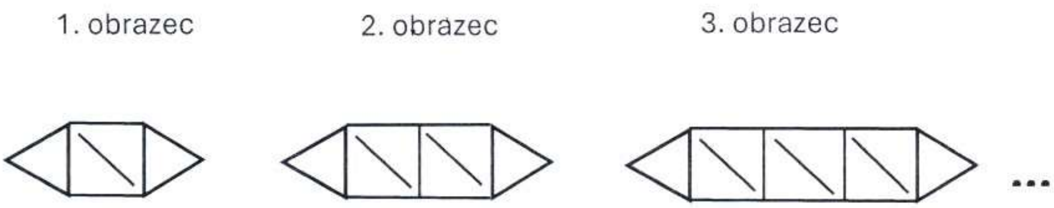
1. Součet tří sčítanců je 360. První dva sčítance jsou stejné, třetí sčítanec je o 6 větší než první dva. Které číslo je trojnásobkem největšího sčítance?

2. Tomáš má v levé kapse o třetinu více mincí než v pravé kapse. Počty mincí v levé a pravé kapse se liší o 4. Kolik mincí má Tomáš dohromady v obou kapsách?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Závodu na lyžích se zúčastnilo 29 dětí. Na kterém místě doběhl Filip, když počet dětí, které doběhly za ním, byl třikrát větší než počet dětí, které doběhly před ním. Zapiš postup, jak jsi úlohu řešil/a.

4. První obrazec je sestaven z 9 sirek, druhý obrazec je sestaven ze 13 sirek a třetí i všechny následující obrazce se postupně zvětšují podle téhož pravidla.

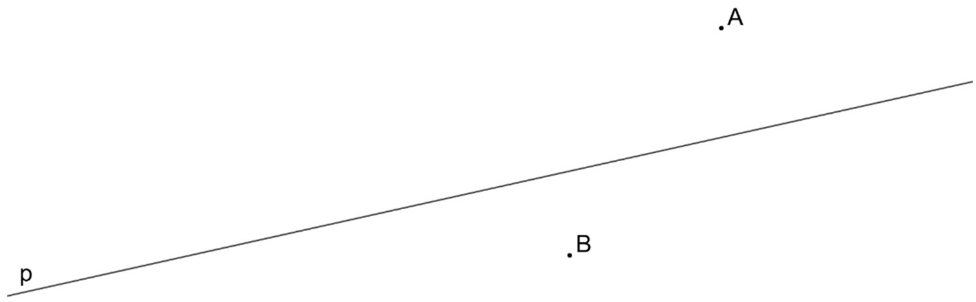


a) Z kolika sirek je sestaven 19. obrazec?

b) Kolikátý obrazec je sestaven ze 125 sirek?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

5. V rovině leží přímka *p* a body *A*, *B*. Body *A, B* jsou vrcholy trojúhelníku *ABC*. Vrchol *C* tohoto trojúhelníku leží na přímce *p*. Délka strany *AB* je polovinou délky strany *BC*. Sestroj vrchol *C* trojúhelníku *ABC*, označ jej písmenem a trojúhelník narýsuj. Najdi všechna řešení a napiš postup konstrukce.



Postup konstrukce:

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL3

Úloha 1. Součet tří sčítanců je 360. První dva sčítance jsou stejné, třetí sčítanec je o 6 větší než první dva. Které číslo je trojnásobkem největšího sčítance?

Řešení:

360 – 6 = 354

354 : 3 = 118

118 + 6 = 124

124 · 3 = 372

Odpověď: Trojnásobkem největšího sčítance je číslo 372.

Úloha 2. Tomáš má v levé kapse o třetinu více mincí než v pravé kapse. Počty mincí v levé a pravé kapse se liší o 4. Kolik mincí má Tomáš dohromady v obou kapsách?

Řešení: 4 je jedna třetina obsahu pravé kapsy. V pravé kapse je 4 · 3 = 12 mincí. V levé kapse je 12 + 4 = 16 mincí.

12 + 16 = 28.

Odpověď: V obou kapsách je 28 mincí.

Úloha 3. Závodu na lyžích se zúčastnilo 29 dětí. Na kterém místě doběhl Filip, když počet dětí, které doběhly za ním, byl třikrát větší než počet dětí, které doběhly před ním. Zapiš postup, jak jsi úlohu řešil/a.

Řešení:

29 – 1 = 28

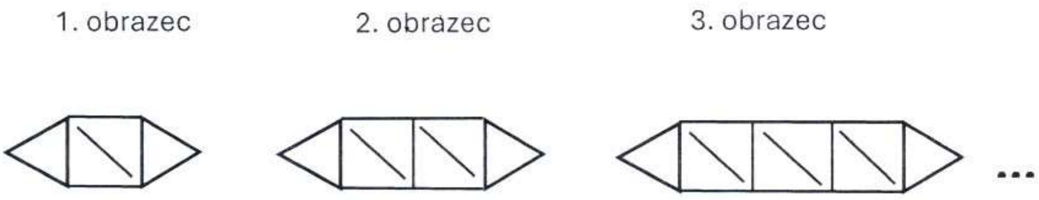
28 : 4 = 7

7 + 1 = 8.

Odpověď: Filip doběhl na 8.místě.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Úloha 4. První obrazec je sestaven z 9 sirek, druhý obrazec je sestaven ze 13 sirek a třetí i všechny následující obrazce se postupně zvětšují podle téhož pravidla.



a) Z kolika sirek je sestaven 19. obrazec?

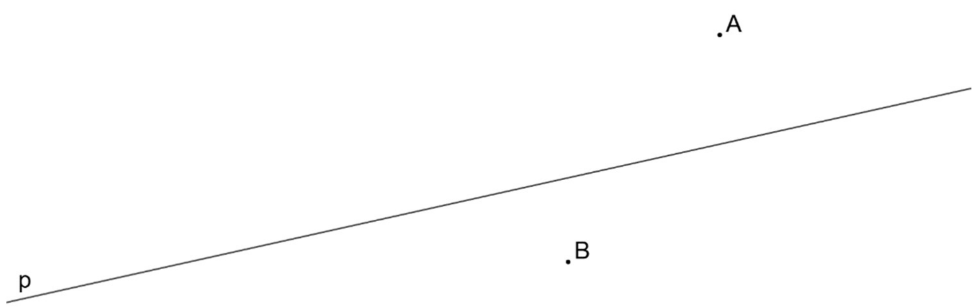
b) Kolikátý obrazec je sestaven ze 125 sirek?

Řešení:

Číslo obrazce	1.	2.	3.	4.	19.	30.
Počet sirek	9	9+4=13	9+2·4=17	9+3·4=21	9+18·4=81	9+29·4=125

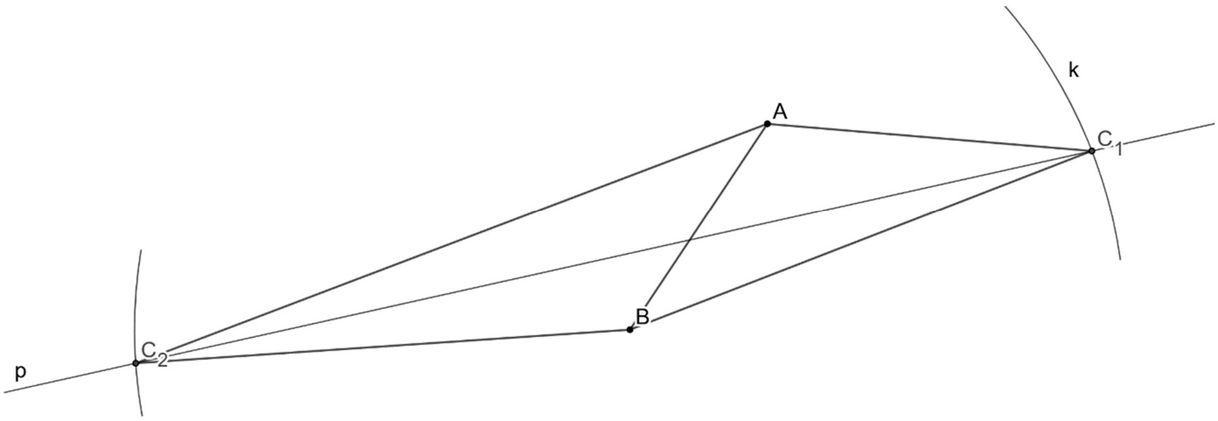
Odpověď: a) 19. Obrazec je sestaven z 81 sirek. b) Ze 125 sirek je sestaven třicátý obrazec.

Úloha 5. V rovině leží přímka *p* a body *A*, *B*. Body *A, B* jsou vrcholy trojúhelníku *ABC*. Vrchol *C* tohoto trojúhelníku leží na přímce *p*. Délka strany *AB* je polovinou délky strany *BC*. Sestroj vrchol *C* trojúhelníku *ABC*, označ jej písmenem a trojúhelník narýsuj. Najdi všechna řešení a napiš postup konstrukce.



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Řešení:



Rozbor: Hledaný bod C leží na přímce p a délka úsečky BC je dvakrát větší než délka úsečky AB. Bod C tedy leží na kružnici se středem v bodě B a poloměrem 2·AB.

<u>Popis konstrukce:</u>

1. A, B, p
2. k; k(B, r = 2·AB)
3. C; C ϵ p ⋂ k
4. ∆ ABC

Odpověď: Úloha má v rovině 2 řešení

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL3

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 3 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 3:

Tabulka 3 Úspěšnost úloh v PL3

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
3/1	83	Řízený experiment (7/18), aritmetická (5/18)
3/2	38	Aritmetická 11/18), nelze identifikovat (7/18)
3/3	83	Aritmetická (15/18)
3/4a	77	Aritmetická (13/18), řízený experiment (4/18)
3/4b	72	Aritmetická (13/18), řízený experiment (4/18)
3/5	66	Konstrukční úloha – slovní popis (10/18)

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 4

Jméno: ____________________

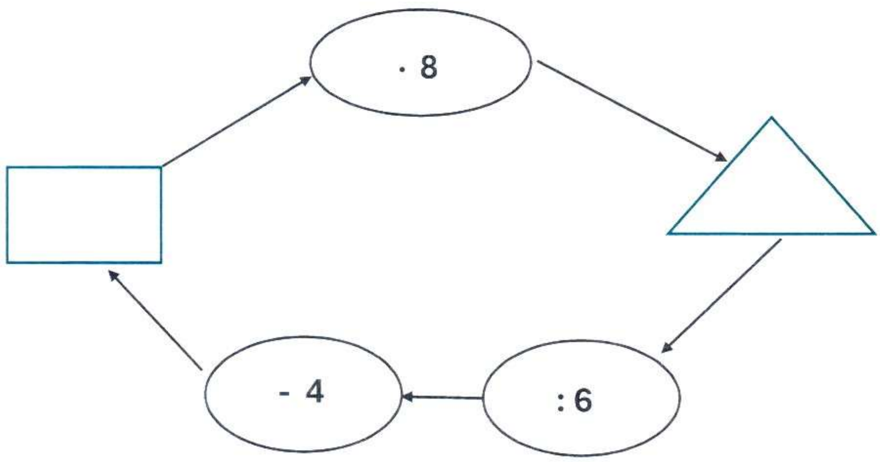
1. Ve třídě 6. A chodí dvě třetiny žáků z celkového počtu 24 na kroužek Digifotografie, polovina dětí na Zálesáky a pět dětí nechodí na žádný z těchto kroužků. Kolik dětí navštěvuje oba kroužky?

2. Sud se zelím má hmotnost 15 kg. Když sníme tři čtvrtiny zelí, váží sud se zbylým zelím 6 kg. Kolik kilogramů váží prázdný sud?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Dne 18. července vyšel v internetových novinách článek s tímto titulkem: „V pražské ZOO se dnes narodilo páté mládě za posledních šest dnů. Jen ve středu nebyl žádný přírůstek.“ Letní prázdniny začaly v pondělí 1. července. Ve který den v týdnu se narodilo první mládě?

4. Najdi jedno číslo, které patří nalevo do obdélníku, a druhé číslo, které patří napravo do trojúhelníku.



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

5. V algebrogramu nahraď stejná písmena stejnými číslicemi a různá písmena různými číslicemi tak, aby platil součet.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & \mathbf{D} \\
 & & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\
 & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\
\mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\
\hline
\mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A}
\end{array}
$$

6. Tatínek sleduje televizní zprávy. Končí za 19 minut. Vysílání rozhlasové hry trvá od 13:05 do 13:56. Maminka ji poslouchá už půl hodiny. Anetka se dívá na internetu od 13:10 na třičtvrtěhodinovou pohádku. Robin si chce v časopise přečíst tři zajímavé články. Jeden článek mu trvá číst 9 minut a čte už 10 minut. Děda čte do dvou hodin noviny. Kdo nejdříve může jít první venčit psa?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL4

Úloha 1. Ve třídě 6.A chodí dvě třetiny žáků z celkového počtu 24 na kroužek Digifotografie, polovina dětí na Zálesáky a pět dětí nechodí na žádný z těchto kroužků. Kolik dětí navštěvuje oba kroužky?

Řešení:

Dvě třetiny z 24 je 16. Jedna polovina z 24 je 12.

24 – 5 = 19

19 - 12 = 7

16 – 7 = 9

Odpověď: Oba kroužky navštěvuje 9 dětí.

Úloha 2. Sud se zelím má hmotnost 15 kg. Když sníme tři čtvrtiny zelí, váží sud se zbylým zelím 6 kg. Kolik kilogramů váží prázdný sud?

Řešení:

15 – 6 = 9

9 : 3 = 3

3 · 4 = 12

15 – 12 = 3

Odpověď: Prázdný sud váží 3 kg.

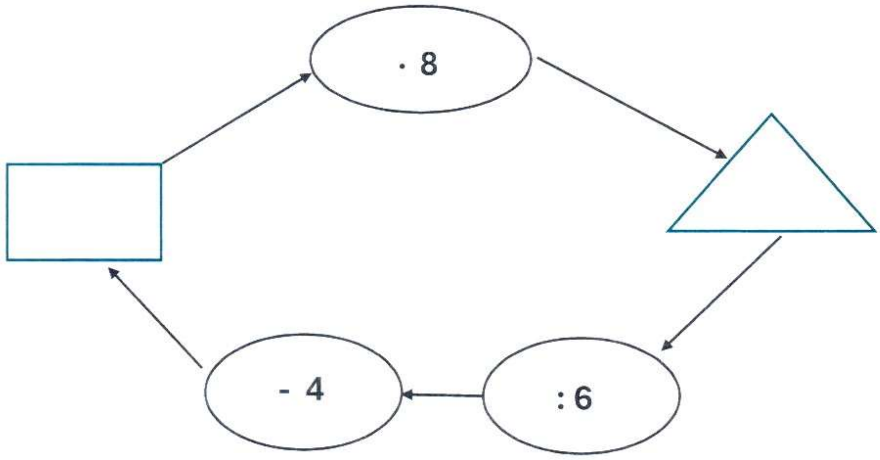
Úloha 3. Dne 18. července vyšel v internetových novinách článek s tímto titulkem: „V pražské ZOO se dnes narodilo páté mládě za posledních šest dnů. Jen ve středu nebyl žádný přírůstek.“ Letní prázdniny začaly v pondělí 1. července. Ve který den v týdnu se narodilo první mládě?

Řešení: Pondělí bylo 1. července, 8. července a 15. července. Tedy 18. července bylo ve čtvrtek, tento den se narodilo 5. mládě. Ve středu 17. července se nenarodilo žádné mládě. Tedy první mládě se narodilo v sobotu 13. července.

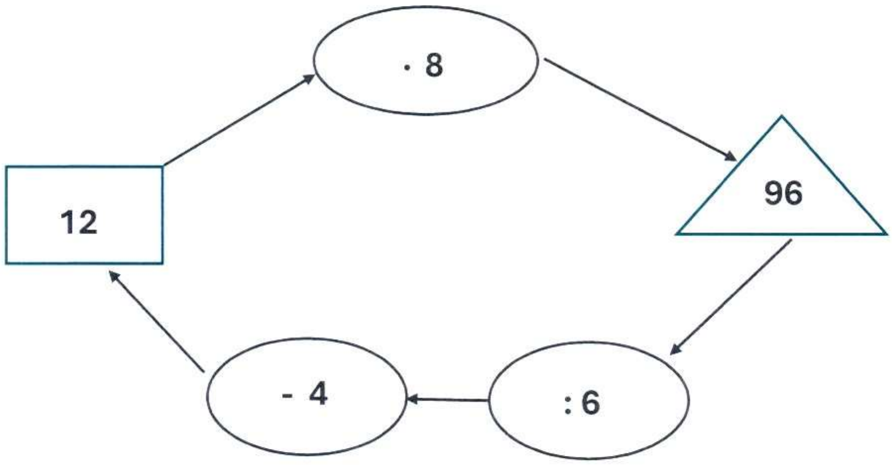
Odpověď: První mládě se narodilo v sobotu 13. července.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Úloha 4. Najdi jedno číslo, které patří nalevo do obdélníku, a druhé číslo, které patří napravo do trojúhelníku.



Řešení: Do trojúhelníku patří číslo dělitelné osmi a šesti současně. Tuto podmínku splňují všechny násobky čísla 24. Aby byla splněna druhá podmínka úlohy, v trojúhelníku může být pouze číslo 96, v obdélníku 12.



Úloha 5. V algebrogramu nahraď stejná písmena stejnými číslicemi a různá písmena různými číslicemi tak, aby platil součet.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

			D
		C	**D**
	B	**C**	**D**
A	**B**	**C**	**D**
A	**A**	**A**	**A**

Řešení:

			9
		1	**9**
	3	**1**	**9**
6	**3**	**1**	**9**
6	**6**	**6**	**6**

			7
		2	**7**
	4	**2**	**7**
8	**4**	**2**	**7**
8	**8**	**8**	**8**

Úloha 6. Tatínek sleduje televizní zprávy. Končí za 19 minut. Vysílání rozhlasové hry trvá od 13:05 do 13:56. Maminka ji poslouchá už půl hodiny. Anetka se dívá na internetu od 13:10 na třičtvrtěhodinovou pohádku. Robin si chce v časopise přečíst tři zajímavé články. Jeden článek mu trvá číst 9 minut a čte už 10 minut. Děda čte do dvou hodin noviny. Kdo nejdříve může jít první venčit psa?

Řešení: Nyní je 13:35 hod, táta končí v 13:45 hod. Máma končí v 13:56 hod. Aneta končí v 13:55 hod. Robin končí v 13:52 hod. Děda končí ve 14 hod

Odpověď: Robin půjde venčit psa.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL4

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 4 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 4:

Tabulka 4 Úspěšnost úloh v PL4

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
4/1	47	Aritmetická (12/17), nelze identifikovat (5/17)
4/2	94	Aritmetická (12/17), nelze identifikovat (3/17)
4/3	59	Aritmetická (14/17), nelze identifikovat (3/17)
4/4	76	Řízený experiment (10/17), nelze identifikovat (3/17)
4/5	29	Řízený experiment (13/17)
4/6	82	Aritmetická (15/17)

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

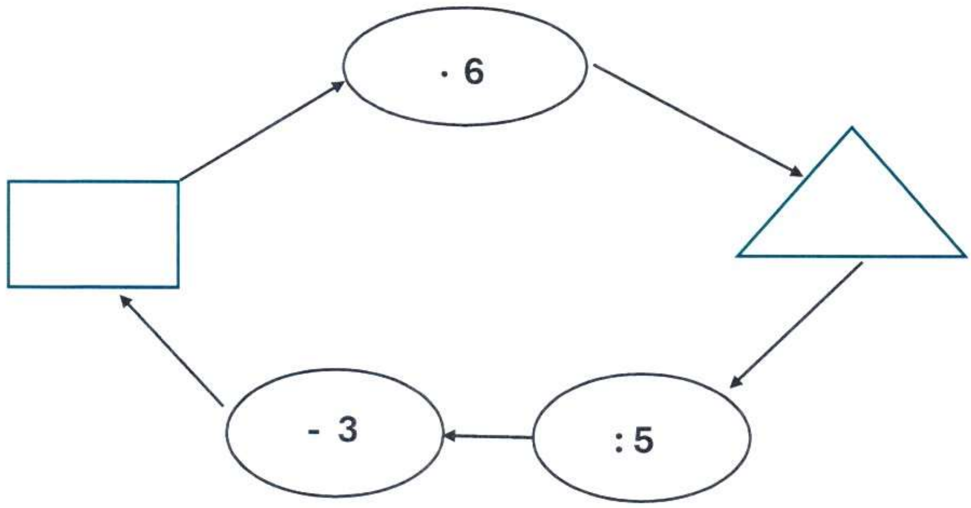
Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 5

Jméno: ___________________

1. Ve hře Svět zvířat si Alenka našla 4 ptáky (holub, páv, krkavec, alka) a jejich hmotnosti (270 g; 700 g; 1,2 kg; 3,4 kg). Uvedené hmotnosti nemusí být ve stejném pořadí jako jména ptáků. Urči hmotnost alky, je-li dáno:
   a) Alka nemá větší hmotnost než krkavec.
   b) Krkavec má větší hmotnost než holub.
   c) Největší hmotnost má páv.
   d) Alka nemá nejmenší hmotnost.

2. Najdi jedno číslo, které patří nalevo do obdélníku, a druhé číslo, které patří napravo do trojúhelníku.



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. V algebrogramu nahraď stejná písmena stejnými číslicemi a různá písmena různými číslicemi tak, aby platil součet.

S	**E**	**D**	**M**
S	**E**	**D**	**M**
S	**E**	**D**	**M**
S	**E**	**D**	**M**
Š	**E**	**S**	**T**

4. Otec je o 5 let mladší, než je trojnásobek synova věku. Za 14 let bude otec dvakrát tak starý, než je jeho syn. Kolik let je otci a kolik synovi?

5. Výletní vláčková souprava jezdící v Moravském krasu je obvykle složena z lokomotivy a dvou přípojných vozíků. Kolik různých souprav jsou zaměstnanci schopni sestavit, jestliže mají v depu k dispozici tři různé lokomotivy a pět různých vozíků? (Lokomotiva musí být vždy vpředu a záleží na pořadí jednotlivých vozíků.)

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL5

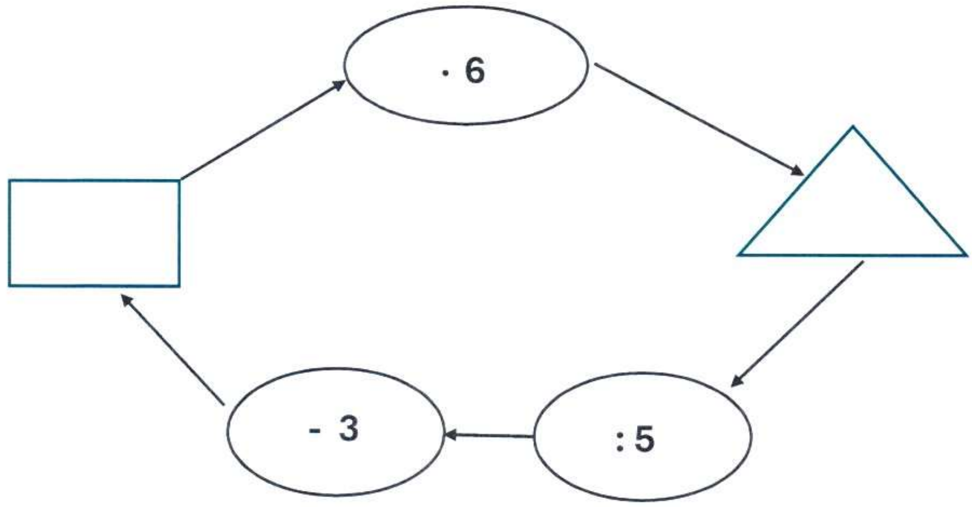
Úloha 1. Ve hře Svět zvířat si Alenka našla 4 ptáky (holub, páv, krkavec, alka) a jejich hmotnosti

(270 g; 700 g; 1,2 kg; 3,4 kg). Uvedené hmotnosti nemusí být ve stejném pořadí jako jména ptáků. Urči hmotnost alky, je-li dáno:

a) Alka nemá větší hmotnost než krkavec.
b) Krkavec má větší hmotnost než holub.
c) Největší hmotnost má páv.
d) Alka nemá nejmenší hmotnost.

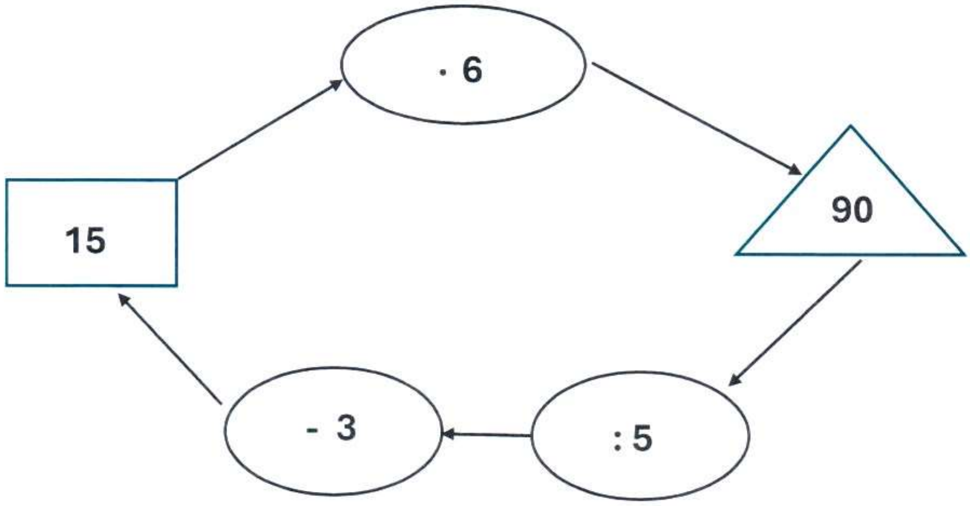
Řešení: Páv váží 3,4 kg. Krkavec váží 1,2 kg. Alka váží 700 g. Holub váží 270 g.
Odpověď: Alka váží 700 g

Úloha 2. Najdi jedno číslo, které patří nalevo do obdélníku, a druhé číslo, které patří napravo do trojúhelníku.



Řešení: Do trojúhelníku patří číslo dělitelné pěti a šesti současně. Tuto podmínku splňují všechny násobky čísla 30. Aby byla splněna druhá podmínka úlohy, v trojúhelníku může být pouze číslo 90, v obdélníku 15.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy



Úloha 3. V algebrogramu nahraď stejná písmena stejnými číslicemi a různá písmena různými číslicemi tak, aby platil součet.

S	**E**	**D**	**M**
S	**E**	**D**	**M**
S	**E**	**D**	**M**
S	**E**	**D**	**M**
Š	**E**	**S**	**T**

Řešení:

1	**3**	**2**	**9**
1	**3**	**2**	**9**
1	**3**	**2**	**9**
1	**3**	**2**	**9**
5	**3**	**1**	**6**

Úloha 4. Otec je o 5 let mladší, než je trojnásobek synova věku. Za 14 let bude otec dvakrát tak starý, než je jeho syn. Kolik let je otci a kolik synovi?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Řešení:

O	25	28	31	52
S	10	11	12	19
S + 14	24	25	26	33
O + 14	39	42	45	66
	X	X	X	**Ok**

66 – 39 = 27

27 : 3 = 9

10 + 9 · 1 = 19

Odpověď: Otci je 52 let, synovi je 19 let.

Úloha 5. Výletní vláčková souprava jezdící v Moravském krasu je obvykle složena z lokomotivy a dvou přípojných vozíků. Kolik různých souprav jsou zaměstnanci schopni sestavit, jestliže mají v depu k dispozici tři různé lokomotivy a pět různých vozíků? (Lokomotiva musí být vždy vpředu a záleží na pořadí jednotlivých vozíků.)

Řešení: 2 · 10 · 3 = 60

Odpověď: Existuje 60 možností různých souprav.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL5

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 5 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 5:

Tabulka 5 Úspěšnost úloh v PL5

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
5/1	94	Řízený experiment (8/16), nelze identifikovat (8/16)
5/2	81	Řízený experiment (10/16), nelze identifikovat (3/16)
5/3	13	Řízený experiment (15/16)
5/4	25	Řízený experiment (8/16), algebraická (6/16)
5/5	44	Řízený experiment (6/16), nelze identifikovat (6/16)

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 6

Jméno: ____________________

1. Dvanáct tužek vyměníš za 3 pera. Dvě pera vyměníš za 6 fixů. Tři fixy vyměníš za jeden blok. Za kolik tužek je jeden blok?

2. Součet čísel je 63. Pro čísla přitom platí: Nejmenší číslo je o 5 menší než prostřední číslo. Největší číslo je dvakrát větší než prostřední číslo. Urči, o která čísla se jedná.

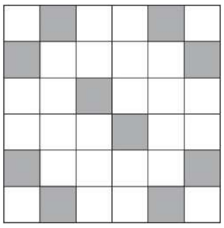
3. Jirka potřebuje odměřit přesně 4 litry vody. Našel ale pouze dvě nádoby – pětilitrovou a třílitrovou. Voda mu teče z kohoutku v libovolném množství. Jak má Jirka odměřit přesně 4 litry?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

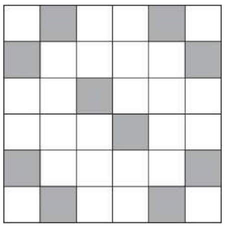
4. Doplň cifry 2, 5, 8, 4, 9, 0, 3 tak, aby byl výsledný součet správný:

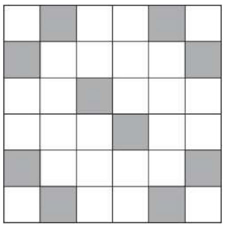
$$\begin{array}{cccc} \_\_ & \_\_ & 3 & \_\_ \\ & 4 & \_\_ & 6 \\ \hline 3 & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{array}$$

5. Obrazec je tvořen deseti šedými čtverečky ve čtvercové síti.



a) Je obrazec osově souměrný? Pokud ano, dokresli do obrázky osu nebo osy souměrnosti.
b) Přemístěním jednoho šedého čtverečku vytvoř obrazec, který má právě jednu osu souměrnosti (zakresli do spodního obrázku vlevo).
c) Doplněním dvou šedých čtverečků vytvoř obrazec, který má právě 4 osy souměrnosti (zakresli do spodního obrázku vpravo).





Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL6

Úloha 1. Dvanáct tužek vyměníš za 3 pera. Dvě pera vyměníš za 6 fixů. Tři fixy vyměníš za jeden blok. Za kolik tužek je jeden blok?

Řešení: Úlohu vyřešíme úvahou.

12 tužek vyměním za 3 pera, to znamená, že 4 tužky vyměním za 1 pero.

2 pera vyměním za 6 fixů, to znamená, že 1 pero vyměním za 3 fixy.

3 fixy vyměním za 1 blok.

1 blok tedy vyměním za 4 tužky.

Odpověď: Jeden blok vyměním za 4 tužky.

Úloha 2. Součet čísel je 63. Pro čísla přitom platí: Nejmenší číslo je o 5 menší než prostřední číslo. Největší číslo je dvakrát větší než prostřední číslo. Urči, o která čísla se jedná.

Řešení: Když k celkovému součtu přičteme 5, dostaneme hodnotu prostředního čísla. Tedy $63 + 5 = 68$, $68 : 4 = 17$ (hodnota prostředního čísla).

nejmenší číslo: $17 - 5 = 12$

prostřední číslo: 17

největší číslo: $2 \cdot 17 = 34$

Zkouška: $12 + 17 + 34 = 63$, $12 + 5 = 17$, $34 : 2 = 17$

Odpověď: Jedná se o čísla 12, 17 a 34.

Úloha 3. Jirka potřebuje odměřit přesně 4 litry vody. Našel ale pouze dvě nádoby – pětilitrovou a třílitrovou. Voda mu teče z kohoutku v libovolném množství. Jak má Jirka odměřit přesně 4 litry?

Řešení: Jirka může postupovat například takto: Naleje do třílitrové nádoby 3 litry vody a přeleje je do pětilitrové. Naleje znovu do třílitrové nádoby 3 litry, ale do pětilitrové přelije jen 2 litry. 1 litr vody mu v třílitrové zůstane. Vylije vodu z pětilitrové, z třílitrové do ní přelije 1 litr a naplní třílitrovou. Má přesně 4 litry vody.

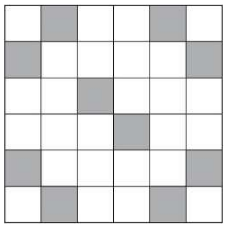
Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Úloha 4: Doplň cifry 2, 5, 8, 4, 9, 0, 3 tak, aby byl výsledný součet správný:

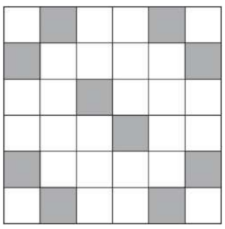
___	___	3	___
	4	___	6
3	___	___	___

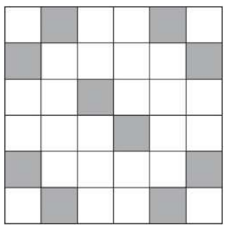
Řešení: Existují dvě řešení: $2538 + 496 = 3034$ nebo $3032 + 496 = 3528$.

Úloha 5: Obrazec je tvořen deseti šedými čtverečky ve čtvercové síti.



a) Je obrazec osově souměrný? Pokud ano, dokresli do obrázky osu nebo osy souměrnosti.
b) Přemístěním jednoho šedého čtverečku vytvoř obrazec, který má právě jednu osu souměrnosti (zakresli do spodního obrázku vlevo).
c) Doplněním dvou šedých čtverečků vytvoř obrazec, který má právě 4 osy souměrnosti (zakresli do spodního obrázku vpravo).





Řešení: a) Ano, obrázek má 2 osy souměrnosti (jsou jimi úhlopříčky celého čtverce).

b) Např. pravý čtvereček uprostřed posuneme o jedno místo nahoru.

c) Doplníme dva čtverečky uprostřed do čtverce.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL6

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 6 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 6:

Tabulka 6 Úspěšnost v úlohách PL6

PL/Úloha číslo	**Úspěšnost (%)**	**Dvě nejčastěji volené strategie**
6/1	85	Algebraická (10/13), aritmetická (2/13)
6/2	77	Pokus–omyl (6/13), řízený experiment (3/13)
6/3	54	Slovní popis (10/13)
6/4	15	Pokus–omyl (13/13)
6/5a	85	Obrázek (11/13)
6/5b	85	Obrázek se šipkou (11/13)
6/5c	92	Obrázek s dokreslenými 2 čtverečky (12/13)

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 7

Jméno: ____________________

1. Toník přijel do školy na kole a na kolo si dal zámek, který mohl odemknout čtyřmístným kódem. Ve škole ale zapomněl, jaký kód si pro svůj zámek na kolo vybral. Pamatoval si jenom to, že celý kód byl dělitelný číslem 25, žádné číslo v něm nebylo použito dvakrát a že čísla v kódu byla uspořádaná od největšího po nejmenší, například 8421. Najdi všechny kódy, které mohl Toník použít.

2. Anička házela při deskové hře třikrát po sobě obyčejnou hrací kostkou. V součtu hodila při těchto třech hodech dohromady 13 ok. Bětka házela třikrát hned po Aničce a hodila stejný součet ok, ale ve třetím hodu jí padl oproti Aničce třetinový počet ok, v druhém hodu měla o polovinu vyšší počet ok než Anička a v prvním hodu jí padlo číslo 5. Jaká čísla padla Aničce?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Dvanáct měsíčků uspořádalo setkání, na němž debatovali o plánech na letošní počasí. Sešli se v kavárně a posedali si k několika stolům tak, že nikdo neseděl sám. Vždy, když některý odcházel domů, podal ruku všem, kteří seděli u jeho stolu. Než všichni odešli, odehrálo se 19 podání rukou. U kolika stolů a v jakém počtu seděli?

4. Na procházce v parku se sešla Andrea s Bárou a Cecilkou. Jedna z těchto dívek mluví vždy pravdu, jedna vždy lže a jedna je mazaná, takže někdy mluví pravdu a někdy lže. Kolemjdoucí slyšel následující rozhovor:
   Andrea: Já jsem mazaná.
   Bára: To je pravda!
   Cecilka: Já nejsem mazaná…
   Která z dívek je mazaná, která vždy lže a která vždy mluví pravdu?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL7

Úloha 1. Toník přijel do školy na kole a na kolo si dal zámek, který mohl odemknout čtyřmístným kódem. Ve škole ale zapomněl, jaký kód si pro svůj zámek na kolo vybral. Pamatoval si jenom to, že celý kód byl dělitelný číslem 25, žádné číslo v něm nebylo použito dvakrát a že čísla v kódu byla uspořádaná od největšího po nejmenší, například 8421. Najdi všechny kódy, které mohl Toník použít.

Řešení: Aby byla splněna dělitelnost 25, musí celý kód končit dvojčíslím 00, 25, 50, nebo 75. Konec 00 ale nesplňuje podmínku o neopakování čísel a konec 25 nesplňuje podmínku, že jsou čísla uspořádána sestupně. Pro konec 50 i pro konec 75 nyní musíme nalézt všechny možné začátky, které neporuší podmínky.

Odpověď: Řešením jsou kódy 9850, 9750, 9650, 8750, 8650, 7650, 9875.

Úloha 2. Anička házela při deskové hře třikrát po sobě obyčejnou hrací kostkou. V součtu hodila při těchto třech hodech dohromady 13 ok. Bětka házela třikrát hned po Aničce a hodila stejný součet ok, ale ve třetím hodu jí padl oproti Aničce třetinový počet ok, v druhém hodu měla o polovinu vyšší počet ok než Anička a v prvním hodu jí padlo číslo 5. Jaká čísla padla Aničce?

Řešení: Protože Bětce padl při třetím hodu třetinový počet ok, který padl Aničce, muselo Aničce padnout 6 ok, případně 3 oka, Bětce pak 2 oka, případně 1 oko. Podobně ve druhém hodu musel Aničce padnout sudý počet ok, tedy 2 oka (Bětce 3 oka), 4 oka (Bětce 6 ok), nebo 6 ok (Bětce by pak padlo 9 ok, což není možné). Protože Bětce padlo v prvním hodu 5 ok a v součtu celkem 13 ok, existuje pouze jedno řešení.

Odpověď: Aničce padlo v pořadí 3, 4 a 6 ok, Bětce padlo v pořadí 5, 6 a 2 ok.

Úloha 3. Dvanáct měsíčků uspořádalo setkání, na němž debatovali o plánech na letošní počasí. Sešli se v kavárně a posedali si k několika stolům tak, že nikdo neseděl sám. Vždy, když některý odcházel domů, podal ruku všem, kteří seděli u jeho stolu. Než všichni odešli, odehrálo se 19 podání rukou. U kolika stolů a v jakém počtu seděli?

Řešení: Nejprve si rozmysleme počty podání rukou u stolu s určitým počtem osob. Jsou-li u stolu 2 osoby, odehraje se 1 podání rukou. Pro 3 osoby jsou to 3 podání rukou, pro

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

4 osoby 6 podání rukou, pro 5 osob 10 podání rukou a pro 6 osob 15 podání rukou. Více osob u stolu uvažovat nemusíme, protože by to znamenalo více než 19 podání rukou. Aby byl celkový počet osob 12 a počet podání rukou 19, muselo sedět 5 osob u jednoho stolu (10 podání), u dalšího stolu pak 4 osoby (6 podání) a u posledního stolu 3 osoby (3 podání).

Odpověď: Měsíčci seděli u tří stolů po třech, čtyřech a pěti osobách.

Úloha 4. Na procházce v parku se sešla Andrea s Bárou a Cecilkou. Jedna z těchto dívek mluví vždy pravdu, jedna vždy lže a jedna je mazaná, takže někdy mluví pravdu a někdy lže. Kolemjdoucí slyšel následující rozhovor:

Andrea: Já jsem mazaná.
Bára: To je pravda!
Cecilka: Já nejsem mazaná…

Která z dívek je mazaná, která vždy lže a která vždy mluví pravdu?

Řešení: Andrea s Bárou souhlasí, mohou tedy nastat dvě situace – obě mluví pravdu, nebo obě lžou. Jistě je tedy jedna z nich mazaná. Proto i Cecilka říká pravdu, když tvrdí, že ona mazaná není. Cecilka mluví vždy pravdu. Z toho plyne, že Andrea i Bára lžou. Pokud by byla Andrea mazaná a přitom by lhala, nemohla by o sobě tvrdit to, co tvrdí. Andrea vždy lže. Bára je mazaná.

Odpověď: Andrea vždy lže, Bára je mazaná a Cecilka vždy mluví pravdu.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL7

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 7 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 7:

Tabulka 7 Úspěšnost úloh v PL7

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
7/1	79	Nelze identifikovat (8/17), řízený experiment (5/17)
7/2	29	Aritmetická (11/17)
7/3	53	Aritmetická (13/17), nelze identifikovat (2/17)
7/4	82	Nelze identifikovat (11/17), řízený experiment (4/17)

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 8

Jméno: ____________________

1. Kolik různých čísel má k dispozici Karel, jestliže si chce na zámek ke kolu zvolit kód, který bude trojciferný, bude dělitelný 3 a zároveň 4, součet čísel zapsaných v kódu bude menší nebo roven 6 a číslice se v něm nebudou opakovat? Kód může začínat nulou.

2. V pohádce se objevují tříhlaví a sedmihlaví draci. Celkem jich je 21 a dohromady mají 111 hlav. O kolik se liší počet tříhlavých a sedmihlavých draků?

3. Vyřeš následující algebrogramy, pokus se najít všechna řešení. Každé písmeno představuje jinou číslici, číslo nemůže začínat nulou.

   ABC + ACB + BCA = 819

   XY · ZY = YWY

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

4. Máš sadu devíti mincí, z nichž osm je pravých a jedna je falešná. Falešná mince je lehčí než pravá mince. Jaký je nejmenší počet vážení na rovnoramenné váze, abys mohl/a najít (identifikovat) falešnou minci?

5. Přehrada v létě zarůstá sinicemi. Každý den se zarostlá plocha přehrady zdvojnásobí oproti předcházejícímu dni. Za kolik dní od začátku zarůstání byla zarostlá polovina přehrady, jestliže dnes je dvacátý čtvrtý den od začátku zarůstání a přehrada se právě dnes celá pokryla sinicemi?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL8

Úloha 1. Kolik různých čísel má k dispozici Karel, jestliže si chce na zámek ke kolu zvolit kód, který bude trojciferný, bude dělitelný 3 a zároveň 4, součet čísel zapsaných v kódu bude menší nebo roven 6 a číslice se v něm nebudou opakovat? Kód může začínat 0.

Řešení: Aby bylo číslo dělitelné 4, musí být poslední dvojčíslí dělitelné číslem 4, další podmínka je, že součet číslic zapsaných v kódu musí být menší roven 6, tedy v úvahu připadají možnosti:

_04; _12;_20;_24; _32; _40

Aby bylo číslo dělitelné 3, musí být jeho ciferný součet dělitelný 3, tedy v úvahu připadají kódy 204; 012; 312; 120; 420; 024; 132; 240.

Odpověď: Karel má k dispozici celkem 8 různých čísel (kódů) splňující dané podmínky.

Úloha 2. V pohádce se objevují tříhlaví a sedmihlaví draci. Celkem jich je 21 a dohromady mají 111 hlav. O kolik se liší počet tříhlavých a sedmihlavých draků?

Řešení: Začneme úvahou, pokud by byli pouze samí tříhlaví draci, bylo by 3 krát 21 hlav = 63 hlav, tedy zůstává nám “rozdat” ještě 111 hlav – 63 hlav = 48 hlav, 48 : 4 = 12, tedy bude 12 sedmihlavých a 9 tříhlavých (21-12 = 9).

Odpověď: Počet tříhlavých a sedmihlavých draků se liší o 3.

Úloha 3. Vyřeš následující algebrogramy, pokus se najít všechna řešení. Každé písmeno představuje jinou číslici, číslo nemůže začínat nulou.

ABC + ACB + BCA = 819

Řešení: A= 2, B= 3, C=4; A=3, B=1, C=5; A= 1, B=5, C=3

XY · ZY = YWY

Řešení: X=3, Y=5, Z=1, W=2; X=1, Y=5, Z=3. W=2

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Úloha 4. Máš sadu devíti mincí, z nichž osm je pravých a jedna je falešná. Falešná mince je lehčí než pravá mince. Jaký je nejmenší počet vážení na rovnoramenné váze, abys mohl/a najít (identifikovat) falešnou minci?

Řešení: Devět mincí rozdělíme na 3 hromady po 3 mincích, zvážíme první ze dvou hromádek, pokud v jedné z hromádek bude falešná mince, na vahách se to prokáže, pokud budou váhy v rovnováze, víme, že falešná mince je ve třetí hromádce. Následně jdeme zvážit hromádku s falešnou mincí, na váhu vložíme na levou stranu jednu minci, na pravou druhou, následně poznáme, zda se jedná o falešné mince či nikoliv.

Odpověď: Nejmenší počet vážení na rovnoramenné váze, abychom mohli najít falešnou minci je 2.

Úloha 5. Přehrada v létě zarůstá sinicemi. Každý den se zarostlá plocha přehrady zdvojnásobí oproti předcházejícímu dni. Za kolik dní od začátku zarůstání byla zarostlá polovina přehrady, jestliže dnes je dvacátý čtvrtý den od začátku zarůstání a přehrada se právě dnes celá pokryla sinicemi?

Řešení: Pokud je dnes 24. den a přehrada je celá zarostlá, včera, tj. 23. den od začátku zarůstání byla zarostlá do poloviny

Odpověď: Polovina přehrady byla zarostlá sinicemi za 23 dní od začátku zarůstání.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL8

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 8 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 8:

Tabulka 8 Úspěšnost úloh v PL8

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
8/1	11	Řízený experiment (7/18), pokus–omyl (6/18)
8/2	61	Aritmetická (11/18), pokus–omyl (3/18)
8/3a	28	Pokus–omyl (5/18), nelze identifikovat (3/18)
8/3b	8	Pokus–omyl (3/18), aritmetická (2/18)
8/4	33	Nelze identifikovat (8/18), aritmetická (6/18)
8/5	72	Nelze identifikovat (9/18), aritmetická (6/18)

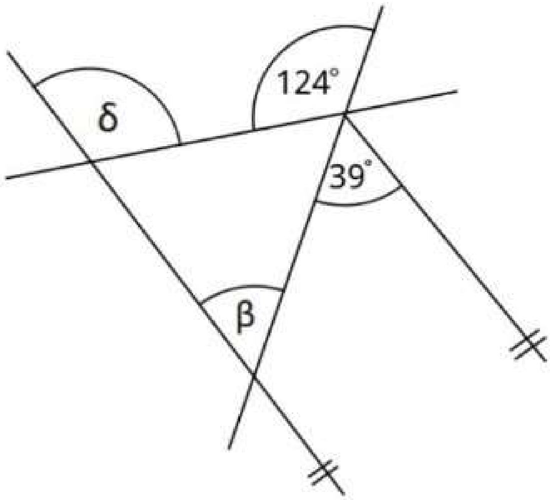
Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

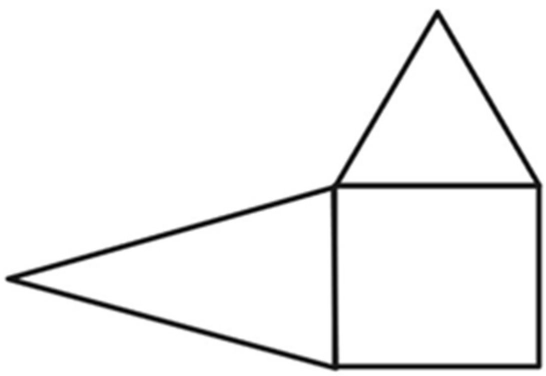
Pracovní list 9

Jméno: ____________________

1. Vypočítej rozdíl velikostí úhlů δ a β. Velikost úhlu neměř, ale vypočítej. Obrázek neodpovídá skutečným velikostem úhlů.



2. Daný útvar se skládá ze čtverce, rovnoramenného a rovnostranného trojúhelníku. Vypočítej obvod celého útvaru, jestliže obvod rovnoramenného trojúhelníku je 37,5 cm a délka ramena rovnoramenného trojúhelníku je dvojnásobná oproti délce strany rovnostranného trojúhelníku.



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Hana dala čtvrtinu všech svých našetřených peněz za dárek pro kamarádku. Za třetinu peněz, které ji zbyly, si koupila fixy. V peněžence ji zůstalo 264 Kč. Kolik Kč měla Hana na začátku nakupování?

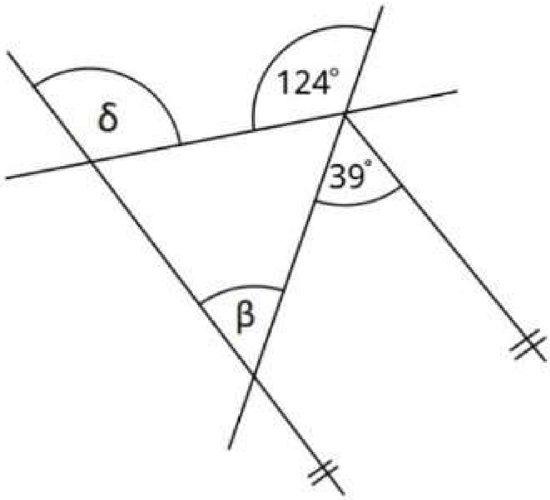
4. Průměrná výška pěti spolužaček (Klára, Lenka, Sára, Bára a Vendula) z 6. třídy je 141 cm. Klára měří 142 cm, součet výšek Lenky, Sáry a Báry je dohromady 423 cm a v tomto pořadí spolužaček (Lenka, Sára a Bára) je každá o 2 cm vyšší než ta předchozí. Vypočítej výšku Sáry a vypočítej výšku Venduly. Výšky spolužaček uveď v centimetrech.

5. Tři fotbalové míče a dva volejbalové míče váží dohromady 1 800 gramů. Jeden fotbalový míč a dva volejbalové míče váží dohromady 960 gramů. Kolik dohromady váží jeden fotbalový a jeden volejbalový míč?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL9

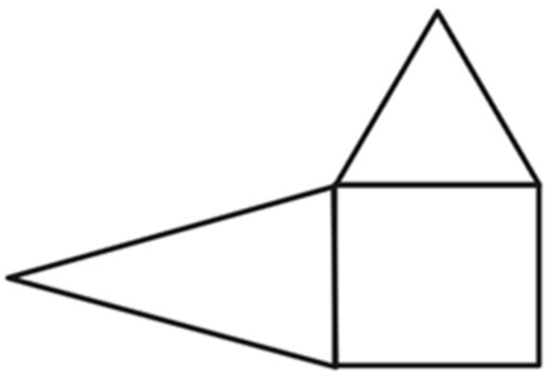
Úloha 1. Vypočítej rozdíl velikostí úhlů δ a β. Velikost úhlu neměř, ale vypočítej. Obrázek neodpovídá skutečným velikostem úhlů.



Řešení: Úhel β je střídavým úhlem k úhlu o velikosti 39°, vedlejší úhel k úhlu 124° má velikost 180° – 124 ° = 56 °, vedlejší úhel k úhlu δ má velikost 180° - (39° +56°) = 180° - 95° = 85°, tedy velikost úhlu δ je rovna 180° - 85°= 95°, tedy rozdíl δ a β = 95°- 39°= 56°

Odpověď: Rozdíl úhlů δ a β je 56°.

Úloha 2. Daný útvar se skládá ze čtverce, rovnoramenného a rovnostranného trojúhelníku. Vypočítej obvod celého útvaru, jestliže obvod rovnoramenného trojúhelníku je 37,5 cm a délka ramena rovnoramenného trojúhelníku je dvojnásobná oproti délce strany rovnostranného trojúhelníku.



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Řešení: Pokud je délka ramene rovnoramenného trojúhelníku dvojnásobná oproti délce rovnostranného trojúhelníku, pak je možné strany tohoto trojúhelníku rozdělit na 5 shodných částí, z nichž jedna část bude mít délku 37,5 : 5 = 7,5, tedy délka základy rovnoramenného trojúhelníku má délku 7,5 cm. Jelikož ramena mají dvojnásobnou délku, mají délku 15 cm, čtverec má délku strany 7,5 cm, délka strany rovnostranného trojúhelníku je také 7,5 cm. Obvod celého útvaru bude 8 · 7,5 = 60.

Odpověď: Obvod celého útvaru je 60 cm.

Úloha 3. Hana dala čtvrtinu všech svých našetřených peněz za dárek pro kamarádku. Za třetinu peněz, které ji zbyly, si koupila fixy. V peněžence ji zůstalo 264 Kč. Kolik Kč měla Hana na začátku nakupování?

Řešení: Řešení “od konce” úlohy, tedy pokud víme, že Hana dala třetinu svých peněz za fixy a zůstalo ji 264, tak 264 = $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ je 132, $\frac{3}{3}$ jsou 396. Pokud dále víme, že za čtvrtinu svých peněz koupila dárek, částka 396 = $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ je 132, $\frac{4}{4}$ jsou 4 · 132 = 528.

Odpověď: Na začátku nakupování měla Hana 528 Kč.

Úloha 4. Průměrná výška pěti spolužaček (Klára, Lenka, Sára, Bára a Vendula) z 6. třídy je 141 cm. Klára měří 142 cm, součet výšek Lenky, Sáry a Báry je dohromady 423 cm a v tomto pořadí spolužaček (Lenka, Sára a Bára) je každá o 2 cm vyšší než ta předchozí. Vypočítej výšku Sáry a vypočítej výšku Venduly. Výšky spolužaček uveď v centimetrech.

Řešení: Nejprve vypočítáme výšky tří spolužaček, víme, že dohromady mají 423 cm a každá je o 2 cm vyšší než ta předchozí, tedy budou měřit 423-6= 417; 417: 3 = 139, Sára bude tedy měřit 139+2=141, nyní sečteme všechny čísla (výšky) spolužaček: (142+139+141+143 + x) : 5 = 141; 565 + x = 705; x = 705-565 = 140

Odpověď: Výška Sáry je 141 cm, výška Venduly 140 cm.

Úloha 5. Tři fotbalové míče a dva volejbalové míče váží dohromady 1 800 gramů. Jeden fotbalový míč a dva volejbalové míče váží dohromady 960 gramů. Kolik dohromady váží jeden fotbalový a jeden volejbalový míč?

Řešení: Víme, že 3 F + 2 V= 1 800 a 1 F + 2V = 960, teda dohromady platí, že 4 F a 4 V váží 2760 g, tedy 1 F a 1 V váží: 2 760 g : 4 = 690 g

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Odpověď: Jeden fotbalový a jeden volejbalový míč dohromady váží 690 g.

Výsledky v úlohách PL9

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 9 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 9:

Tabulka 9 Úspěšnost úloh v PL9

PL/Úloha číslo	**Úspěšnost (%)**	**Dvě nejčastěji volené strategie**
9/1	21	Aritmetická (9/14), nelze identifikovat (5/14)
9/2	71	Aritmetická (10/14), nelze identifikovat (2/14)
9/3	79	Aritmetická (13/14), nelze identifikovat (1/14)
9/4	71	Aritmetická (13/14), pokus–omyl (1/14)
9/5	64	Aritmetická (9/14), algebraická (3/14)

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 10

Jméno: ____________________

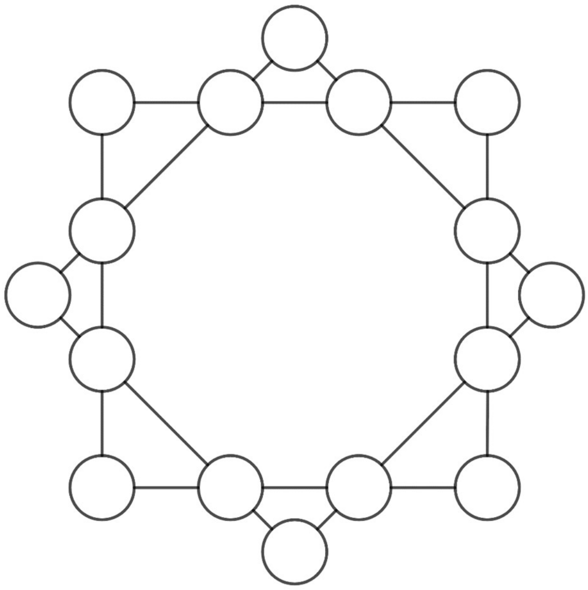
1. Sečti tři čísla, z nichž první je zapsáno jednou jedničkou a čtyřmi dvojkami, druhé jednou dvojkou a čtyřmi trojkami a třetí číslo je zapsáno jednou jedničkou, dvěma dvojkami jednou trojkou a jednou čtyřkou. Součet těchto čísel je 98 765. Napiš správně celý příklad.

2. Sára si vypsala prvních dvacet přirozených násobků čísla 3 a poslala je v psaníčku Karlovi, který měl za úkol všechna čísla sečíst. Zvládl to správně a neuvěřitelně rychle! Jaký výsledek Karlovi vyšel a jak mohl k výsledku dojít tak rychle?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Lojza byl na prázdninách u strýčka, kde bylo nutné dodržovat speciální režim spánku. Některé dny spal Lojza 6 hodin, jiné dny 9 hodin. Lojza ke strýčkovi přijel v poledne a v poledne také odjížděl. Kolik nocí strávil Lojza u strýčka, jestliže tvrdí, že tam naspal přesně 53 hodin?

4. Aleš doplnil do kroužků čísla od 1 do 16 tak, aby bylo v každém kroužku jiné číslo a aby součet čísel ve všech přímých směrech (na všech stranách obou čtverců) byl 34. Pak vzal pastelky, všechny kroužky se sudým číslem vybarvil modře a s lichým číslem červeně. Vybarvi kroužky tak, jak je mohl vybarvit i Aleš.



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL10

Úloha 1. Sečti tři čísla, z nichž první je zapsáno jednou jedničkou a čtyřmi dvojkami, druhé jednou dvojkou a čtyřmi trojkami a třetí číslo je zapsáno jednou jedničkou, dvěma dvojkami jednou trojkou a jednou čtyřkou. Součet těchto čísel je 98 765. Napiš správně celý příklad.

Řešení: Postupně doplňujme číslice od nejvyšších řádů, tedy od desetitisíců. Protože je v prvním čísle nejvýše číslice 2, ve druhém čísle nejvýše číslice 3 a ve třetím čísle nejvýše číslice 4, nemusí nás trápit přechod přes desítku při sčítání. Abychom na místě desetitisíců získali v součtu číslici 9, musela být v tomto řádu v prvním čísle 2, ve druhém čísle 3 a ve třetím čísle 4. Protože ve třetím čísle už je umístěna číslice 4, můžeme na místě tisíců v součtu získat číslici 8 pouze pokud bude mít první číslo na místě tisíců 2, druhé číslo 3 a třetí číslo také 3. Stejně tak jsou jasně dané číslice na místě stovek. V řádech desítek a jednotek pak máme více možností.

Odpověď:

22 212+33 332+43 221=98 765

22 221+33 323+43 221=98 765

22 221+33 332+43 212=98 765

Úloha 2. Sára si vypsala prvních dvacet přirozených násobků čísla 3 a poslala je v psaníčku Karlovi, který měl za úkol všechna čísla sečíst. Zvládl to správně a neuvěřitelně rychle! Jaký výsledek Karlovi vyšel a jak mohl k výsledku dojít tak rychle?

Řešení: Karel mohl například postupovat tak, že sečetl první násobek s dvacátým (3+60), druhý násobek s devatenáctým (6+57) a tak dál, přičemž součet byl vždy 63. Takových součtů poskládal deset, výsledkem je tedy 63·10=630.

Odpověď: Karlovi vyšel výsledek 630, mohl k němu dojít vhodným sdružováním sčítanců.

Úloha 3. Lojza byl na prázdninách u strýčka, kde bylo nutné dodržovat speciální režim spánku. Některé dny spal Lojza 6 hodin, jiné dny 9 hodin. Lojza ke strýčkovi přijel v poledne a v poledne také odjížděl. Kolik nocí strávil Lojza u strýčka, jestliže tvrdí, že tam naspal přesně 53 hodin?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

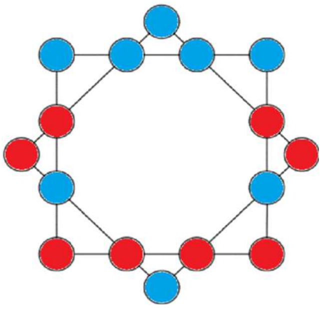
Řešení: Taková situace nemohla nastat, pokud by Lojza sečetl všechny naspané hodiny, musel by součet být dělitelný třemi (třemi jsou dělitelná čísla 6 i 9). Protože ale Lojza tvrdí, že součet je 53, úloha nemá řešení.

Odpověď: Úloha nemá řešení.

Úloha 4. Aleš doplnil do kroužků čísla od 1 do 16 tak, aby bylo v každém kroužku jiné číslo a aby součet čísel ve všech přímých směrech (na všech stranách obou čtverců) byl 34. Pak vzal pastelky, všechny kroužky se sudým číslem vybarvil modře a s lichým číslem červeně. Vybarvi kroužky tak, jak je mohl vybarvit i Aleš.

Řešení: V obrázku je vyznačené možné řešení. Při řešení je třeba počítat s tím, že máme k dispozici osm sudých a osm lichých čísel. Přitom součet v přímých směrech má být sudý, proto v každém přímém směru lze sčítat buď čtyři sudá čísla, nebo čtyři lichá čísla, nebo dvě sudá a dvě lichá čísla.

Odpověď:



Výsledky v úlohách PL10

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 10 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 10:

Tabulka 10 Úspěšnost úloh v PL10

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
10/1	82	Aritmetická (12/17)
10/2	53	Aritmetická (16/17), nelze identifikovat (1/17)
10/3	65	Aritmetická (10/17), řízený experiment (4/17)
10/4	35	Aritmetická (5/17), nelze identifikovat (4/17)

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 11

Jméno: ____________________

1. Anička měla na začátku dne o 33 bonbónů více než její kamarádka Adéla. Během dne 8 bonbónů snědla a potom se rozhodla, že dá 15 bonbónů své kamarádce Adéle. Která z holek měla na konci dne více bonbónů a o kolik?

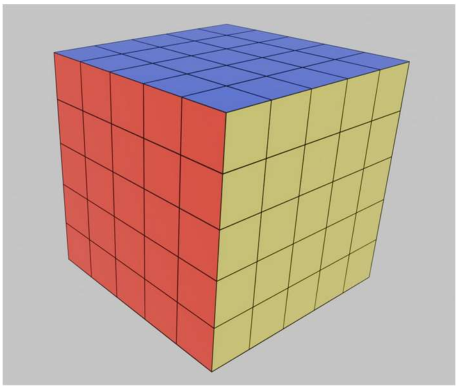
2. Cukrář pracoval 4 hodiny a vyrobil za tuto dobu celkem 38 zákusků. Během této doby vyrobil vždy každou další hodinu o 3 méně zákusků než předchozí hodinu, protože začal být unavený. Kolik vyrobil zákusků v první a v poslední hodině, kdy zákusky vyráběl?

3. Urči počet všech pětimístných kódů. Každý kód je tvořen pěti různými číslicemi, začíná dvojčíslím 81 a je dělitelný číslem 4 a zároveň číslem 10. Kód může začínat nulou.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

4. Přirozené číslo dává po dělení čtyřmi zbytek tři a po dělení třemi zbytek dva. O jaké přirozené číslo se jedná? Může být takovýchto čísel více? Pokud ano, kolik?

5. Krychle, která je na obrázku níže a má obarveny všechny stěny, je rozřezána na několik menších krychlí o stejných rozměrech. Urči, kolik malých krychlí obsahuje celá krychle. Dále urči, kolik malých krychlí má obarveny alespoň 2 stěny a kolik malých krychlí nemá obarvenou žádnou stěnu?



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL11

Úloha 1. Anička měla na začátku dne o 33 bonbónů více než její kamarádka Adéla. Během dne 8 bonbónů snědla a potom se rozhodla, že dá 15 bonbónů své kamarádce Adéle. Která z holek měla na konci dne více bonbónů a o kolik?

Řešení: Anička měla o 33 více než Adéla, potom 8 snědla, tedy měla jen o 25 více než Adéla, potom 15 dala Adéle, tedy měla o 10 více než Adéla, ale Adéla měla o 15 více než Anička po předání.

Odpověď: Adéla měla o 5 více bonbónů než Anička.

Úloha 2. Cukrář pracoval 4 hodiny a vyrobil za tuto dobu celkem 38 zákusků. Během této doby vyrobil vždy každou další hodinu o 3 méně zákusků než předchozí hodinu, protože začal být unavený. Kolik vyrobil zákusků v první a v poslední hodině, kdy zákusky vyráběl?

Řešení: Po 1. hodině měl cukrář o 3 méně zákusků, po druhé hodině o 6 méně než první hodinu, po třetí hodině o 9 méně než druhou hodinu, poté skončil. Celkem měl za 4 hodiny o 18 méně zákusků za celou dobu, tedy 38-18=20, 20 : 4 = 5.

Odpověď: Cukrář první hodinu vyrobil 14 zákusků a poslední hodinu vyrobil 5 zákusků.

Úloha 3. Urči počet všech pětimístných kódů. Každý kód je tvořen pěti různými číslicemi, začíná dvojčíslím 81 a je dělitelný číslem 4 a zároveň číslem 10. Kód může začínat nulou.

Řešení: 81 _ _ _ , aby byl kód dělitelný číslem 4 a číslem 10 zároveň a číslice se neopakovaly, připadají v úvahu tyto možnosti: 81 _ 20; 81 _ 40; 81 _ 60. Na prázdné místo se dá vždy doplnit 6 různých číslic, tedy celkový počet všech možností je 6 · 3 = 18.

Odpověď: Počet pětimístných kódů splňující zadané podmínky je 18.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Úloha 4. Přirozené číslo dává po dělení čtyřmi zbytek tři a po dělení třemi zbytek dva. a) O jaké přirozené číslo se jedná?

b) Může být takovýchto čísel více? Pokud ano, kolik?

Řešení: Najdu nejmenší přirozené číslo, které splňuje dané podmínky, takovýmto číslem je číslo 11, dále číslo 23; 35; 47 a tak dále. Tato čísla se zvětšují o 12. Takovýchto čísel splňující dané podmínky je nekonečně mnoho.

Odpověď: a) O jaké přirozené číslo se jedná? Např. o číslo 11; 23; 35; 47, a tak dále.

b) Může být takovýchto čísel více? Ano. Pokud ano, kolik? Nekonečně mnoho.

Úloha 5. Krychle, která je na obrázku níže a má obarveny všechny stěny, je rozřezána na několik menších krychlí o stejných rozměrech. Urči, kolik malých krychlí obsahuje celá krychle. Dále urči, kolik malých krychlí má obarveny alespoň 2 stěny a kolik malých krychlí nemá obarvenou žádnou stěnu?

Řešení: Celá krychle obsahuje 125 krychlí ($5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$)

Odpověď: Kolik malých krychlí má obarveny alespoň 2 stěny: 44

Kolik malých krychlí nemá obarvenou žádnou stěnu: 27

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL11

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 11 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 11:

Tabulka 11 Úspěšnost úloh v PL11

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
11/1	71	Aritmetická (14/17), nelze identifikovat (3/17)
11/2	53	Aritmetická (10/17), řízený experiment (3/17)
11/3	29	Řízený experiment (11/17), pokus–omyl (2/17)
11/4a	71	Nelze identifikovat (7/17), řízený experiment (4/17)
11/4b	53	Nelze identifikovat (10/17)
11/5a	59	Nelze identifikovat (9/17), aritmetická (7/17)
11/5b	53	Nelze identifikovat (8/17), aritmetická (6/17)
11/5c	59	Nelze identifikovat (9/17), aritmetická (6/17)

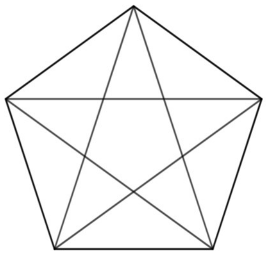
Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 12

Jméno: ____________________

1. Spočítej, kolik je na obrázku trojúhelníků.



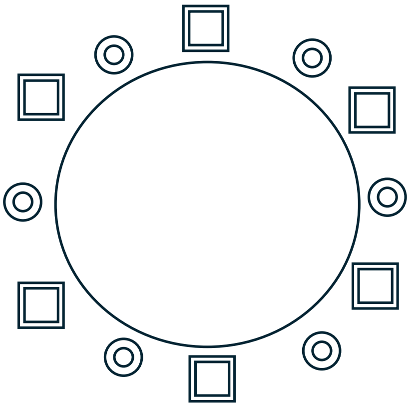
2. Vyřeš algebrogram, každé písmeno zastupuje jednu číslici, dvě různá písmena zastupují dvě různé číslice.

ABC : AD = AE
+   +
FG – BG = EH
=   =
EDH   CF

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Do kroužku deskových her donesl Vítek na ukázku trojšachy, deskovou hru podobnou šachům, ale určenou pro tři hráče. Členové kroužku si hru oblíbili a brzy uspořádali turnaj, ve kterém postupně vytvořili všechny možné trojice a každá z těchto trojic si zahrála jednu hru. Kolik hráčů se turnaje účastnilo, jestliže bylo odehráno 10 her?

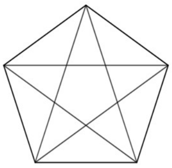
4. Zasedání u kulatého stolu se zúčastnilo šest žen a šest mužů. Každá žena seděla na kulaté židličce a měla na cedulce napsané liché číslo, každý muž seděl na hranaté židličce a měl na cedulce napsané sudé číslo. Žádné dvě osoby neměly na cedulce stejné číslo. Součet čísel na cedulkách všech žen byl 42 stejně jako součet čísel na cedulkách všech mužů. Navíc součet čísel osob sedících přímo naproti sobě byl vždy 14 a součet čísel ženy a obou mužů sedících vedle ní byl vždy 21. Napiš do plánku, kde seděla osoba s jakým číslem.



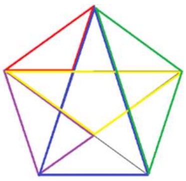
Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL12

Úloha 1. Spočítej, kolik je na obrázku trojúhelníků.



Řešení: V obrázku existuje několik typů trojúhelníků, pro přehlednost jsou barevně zaznačeny jejich obrysy. Červené trojúhelníky jsou nejmenší, jsou tvořeny pouze jedním trojúhelníkem a je jich 10. Fialové trojúhelníky jsou v obrázku tvořeny ze dvou sousedících trojúhelníků a je jich také 10. Žluté trojúhelníky jsou tvořeny dvěma trojúhelníky a prostředním pětiúhelníkem, dva z jeho vrcholů jsou zároveň vrcholy původního pětiúhelníku – trojúhelníků je 5. Jedna strana modrých trojúhelníků je zároveň stranou původního pětiúhelníku, všechny vrcholy modrých trojúhelníků jsou vrcholy původního pětiúhelníků – takových trojúhelníků najdeme v obrázku 5. Posledním typem je zelený trojúhelník, jehož dvě strany jsou zároveň stranami původního pětiúhelníku, je jich také 5.



Odpověď: V obrázku je 35 trojúhelníků.

Úloha 2. Vyřeš algebrogram, každé písmeno zastupuje jednu číslici, dvě různá písmena zastupují dvě různé číslice.

ABC : AD = AE
+ +
FG – BG = EH
= =
EDH CF

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Řešení: Z rozdílů FG—BG plyne, že H=0. Z podílu ABC:AD plyne, že A=1. Následně v prvním sloupci ze součtu ABC+FG vidíme, že E=2. Dále se můžeme zaměřit na podíl v prvním řádku, který lze po doplnění výše uvedených hodnot uvažovat 156:13, 168:14, 180:15 a 192:16. Poslední 2 uvedené možnosti nevyhovují, protože číslice 0 a 2 již byly použity. Při doplnění 168:14 zjistíme, že v součtu ABC+FG by muselo být G=2, což opět nelze. Proto B=5, C=6, D=3. Zbylé číslice snadno doplníme (F=7, G=4).

Odpověď:

156	:	13	=	12
+		+		
74	—	54	=	20
=		=		
230		67		

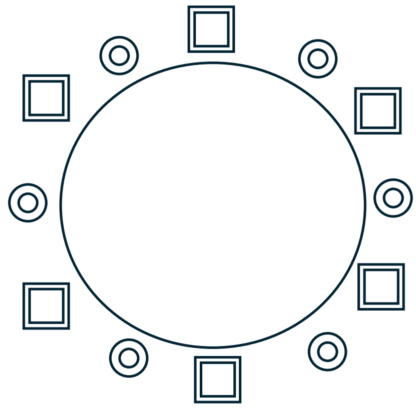
Úloha 3. Do kroužku deskových her donesl Vítek na ukázku trojšachy, deskovou hru podobnou šachům, ale určenou pro tři hráče. Členové kroužku si hru oblíbili a brzy uspořádali turnaj, ve kterém postupně vytvořili všechny možné trojice a každá z těchto trojic si zahrála jednu hru. Kolik hráčů se turnaje účastnilo, jestliže bylo odehráno 10 her?

Řešení: Úlohu lze řešit například vypsáním všech trojic pro nízké počty hráčů. Ze tří hráčů vytvoříme pouze jednu trojici ABC. Přidáme-li čtvrtého hráče, přibydou trojice ABD, ACD, BCD. Po přidání pátého hráče přibydou trojice ABE, ACE, ADE, BCE, BDE a CDE. Dohromady získáváme 10 trojic, což odpovídá počtu her.

Odpověď: Turnaje se účastnilo 5 hráčů.

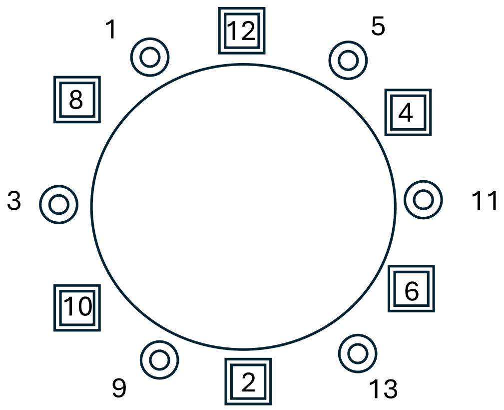
Úloha 4. Zasedání u kulatého stolu se zúčastnilo šest žen a šest mužů. Každá žena seděla na kulaté židličce a měla na cedulce napsané liché číslo, každý muž seděl na hranaté židličce a měl na cedulce napsané sudé číslo. Žádné dvě osoby neměly na cedulce stejné číslo. Součet čísel na cedulkách všech žen byl 42 stejně jako součet čísel na cedulkách všech mužů. Navíc součet čísel osob sedících přímo naproti sobě byl vždy 14 a součet čísel ženy a obou mužů sedících vedle ní byl vždy 21. Napiš do plánku, kde seděla osoba s jakým číslem.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy



Řešení: Aby byla na cedulkách různá čísla a součet protilehlých byl 14, musí proti sobě sedět 1/13, 2/12, 3/11, 4/10, 5/9/, 6/8. Uvážením součtu čísel ženy a kolem sedících mužů zjistíme, že žena s číslem 1 musí sedět mezi muži s číslem 8 a 12. Muž s číslem 10 nemůže sedět poblíž muže s číslem 12, jejich součet by spolu s číslem ženy mezi nimi přesáhl 21. Umístění mužů je tedy dané a stačí umístit ženy tak, aby byla splněna podmínka součtu sousedících osob.

Odpověď:



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL12

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 12 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 12:

Tabulka 12 Úspěšnost úloh v PL12

PL/Úloha číslo	**Úspěšnost (%)**	**Dvě nejčastěji volené strategie**
12/1	42	Aritmetická (15/19), nelze identifikovat (4/19)
12/2	16	Aritmetická (9/19)
12/3	63	Aritmetická (13/19), nelze identifikovat (4/19)
12/4	37	Aritmetická (7/19), nelze identifikovat (6/19)

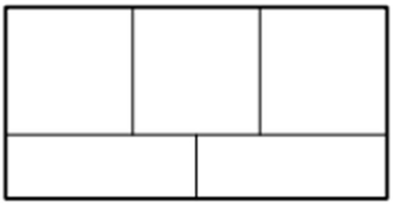
Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 13

Jméno: ____________________

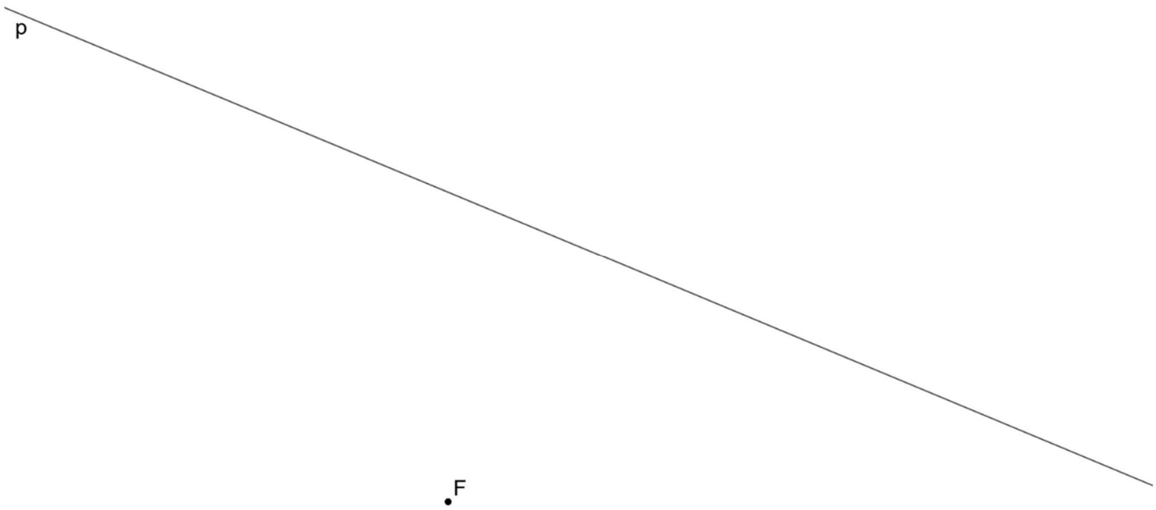
1. Jarmila měla na zahrádce pět záhonů rozmístěných stejně jako na obrázku. Záhony chtěla osadit cibulí, salátem a rajčaty tak, aby na každém záhonu byl jen jeden druh zeleniny a aby žádné dva záhony se stejnou zeleninou spolu nesousedily. Kolik existuje způsobů, jakými mohla Jarmila záhony osázet?



2. Urči součet všech přirozených čísel od 1 do 30.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. V rovině leží bod *F* a přímka *p*.



Bod *F* je vrchol rovnoramenného trojúhelníku *EFG*. Strana *EF* tohoto trojúhelníku má délku 4 cm a leží na kolmici k přímce *p*. Na přímce *p* leží vrchol *G* trojúhelníku *EFG*.

Sestroj vrcholy *E, G* trojúhelníku *EFG* a trojúhelník narýsuj. Najdi všechna řešení a zapiš postup konstrukce.

Postup konstrukce:

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

4. Zajíc běží závod na 2 135 metrů. Při startu se odrazil levou nohou a po celou dobu závodu pravidelně střídá levou, pravou a obě nohy. Když se zajíc odrazí levou nohou, skočí 35 dm, když se odrazí pravou nohou, skočí 15 dm, a když se odrazí oběma nohama, skočí 61 dm. Kolik skoků zajíc udělá, než dorazí do cíle? A kterou nohou se bude odrážet před cílovým skokem?

5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet. Zadání slovní úlohy napiš a úlohu vyřeš:

$$1\,000 - (637 + 148)$$

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL13

Úloha 1. Jarmila měla na zahrádce pět záhonů rozmístěných stejně jako na obrázku. Záhony chtěla osadit cibulí, salátem a rajčaty tak, aby na každém záhonu byl jen jeden druh zeleniny a aby žádné dva záhony se stejnou zeleninou spolu nesousedily. Kolik existuje způsobů, jakými mohla Jarmila záhony osázet?

Řešení:

C … cibule

S … salát

R … rajčata

Pokud v levém horním rohu zahrady Jarmila zasadí salát, tak ho může zasadit dále jen do dolního rohu zahrady, aby byla splněna podmínka úlohy. Pro osázení zbývajících tří záhonů rajčaty a cibulí existují dvě možnosti, jak znázorňují tabulky níže. Podobné úvahy provedeme pro osázení levého horního rohu rajčaty a následně cibulí. Možných způsobů, jak osázet zahradu, je $2 \cdot 3 = 6$

S	R	C
C	S	

S	C	R
R	S	

Odpověď: Existuje 6 možných způsobů, jak osázet záhon.

Úloha 2. Urči součet všech přirozených čísel od 1 do 30.

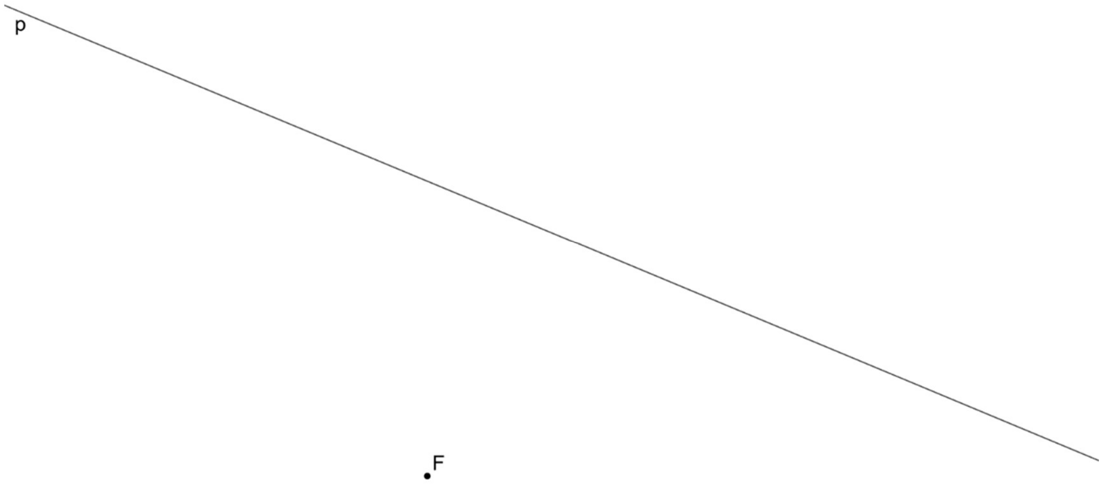
Řešení:

$$1 + 2 + 3 + ... + 28 + + 29 + 30 = (1+30) + (2+29) + (3+28) + ... (15+16) = 31 \cdot 15 = 465$$

Odpověď: Součet všech přirozených čísel od 1 do 30 je 465.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

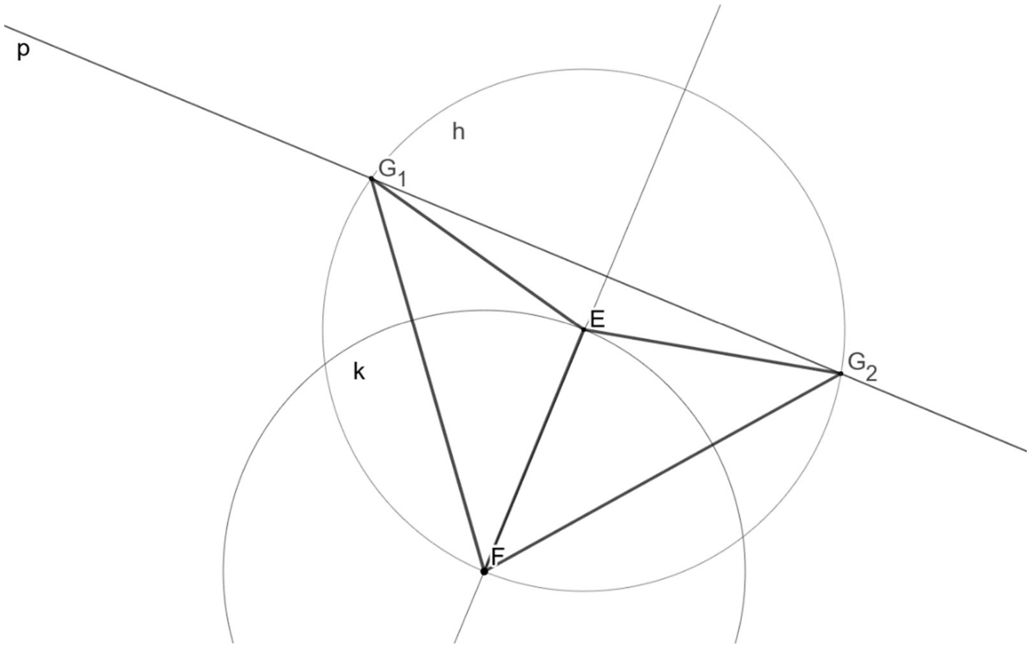
Úloha 3. V rovině leží bod *F* a přímka *p*.



Bod *F* je vrchol rovnoramenného trojúhelníku *EFG*. Strana *EF* tohoto trojúhelníku má délku 4 cm a leží na kolmici k přímce *p*. Na přímce *p* leží vrchol *G* trojúhelníku *EFG*.

Sestroj vrcholy *E, G* trojúhelníku *EFG* a trojúhelník narýsuj. Najdi všechna řešení a zapiš postup konstrukce.

Řešení:



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

<u>Popis konstrukce:</u>

1. p, F
2. q, $q \perp p \wedge F \in q$;
3. k; k (F, r = 4 cm);
4. E; $E \in q \cap k$;
5. h; h (E, r = 4 cm);
6. G, $G \in p \cap h$;
7. Δ EFG

Odpověď: Úloha má v rovině 2 řešení.

Úloha 4. Zajíc běží závod na 2 135 metrů. Při startu se odrazil levou nohou a po celou dobu závodu pravidelně střídá levou, pravou a obě nohy. Když se zajíc odrazí levou nohou, skočí 35 dm, když se odrazí pravou nohou, skočí 15 dm, a když se odrazí oběma nohama, skočí 61 dm. Kolik skoků zajíc udělá, než dorazí do cíle? A kterou nohou se bude odrážet před cílovým skokem?

Řešení:

2 135 m = 21 350 dm

35 dm + 15 dm + 61 dm = 111 dm (Jeden zajícům “trojskok” měří 111 dm)

21 350 : 111 = 192 zb. 38 (Zajíc provede celkem 192 celých “trojskoků”, do cíle zbývá 38 dm.

192 · 3 = 576 (Zajíc provede celkem 576 skoků, do cíle zbývá 38 dm)

38 dm – 35 dm = 3 dm

576 + 2 = 578

Odpověď: Zajíc udělá 578 skoků, než doběhne do cíle. Naposledy se bude odrážet pravou nohou.

Úloha 5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet. Zadání slovní úlohy napiš a úlohu vyřeš:

$$1\,000 - (637 + 148)$$

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Řešení: Maminka šla nakoupit. Koupila boty za 637 Kč a pláštěnku za 148 Kč. Kolik korun jí prodavačka vrátila u pokladny, když zaplatila 1000 Kč.

1 000 – (637 + 148) = 215

Odpověď: Prodavačka mamince vrátila 215 Kč.

Výsledky v úlohách PL13

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 13 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 13:

Tabulka 73 Úspěšnost úloh v PL13

PL/Úloha číslo	**Úspěšnost (%)**	**Dvě nejčastěji volené strategie**
13/1	74	Řízený experiment (14/19), nelze identifikovat (3/19)
13/2	74	Aritmetická (19/19)
13/3	25	Konstrukční úloha – slovní popis (6/19)
13/4	14	Aritmetická (15/19)

Úloha 5: zadání slovní úlohy odpovídalo početnímu příkladu (14/18), zadání slovní úlohy nebylo v kontextu s početním příkladem (3/18). Jeden ze žáků nevymyslel žádné zadání slovní úlohy k početnímu příkladu.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 14

Jméno: ____________________

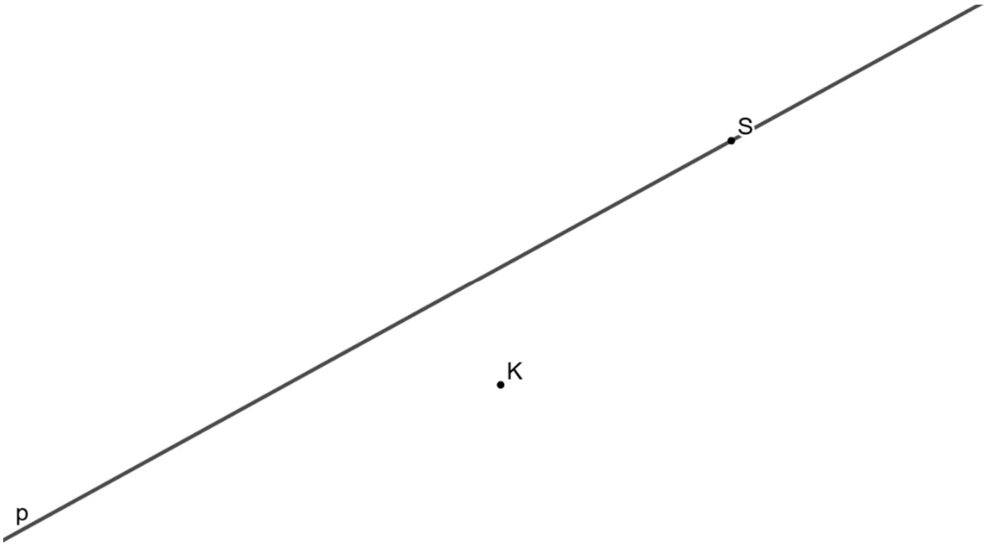
1. V hotelu Radost je možno ubytovat celkem 66 hostů. Jsou v něm pouze čtyřlůžkové, třílůžkové a dvojlůžkové pokoje, přičemž všech pokojů je 24. Kolik je v hotelu čtyřlůžkových, třílůžkových a dvojlůžkových pokojů víme-li, že počet dvojlůžkových pokojů je lichý?

2. Urči součet čísel následující řady

   3 + 6 + 9 + 12 + …… + 264 + 267 + 270.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. V rovině leží body *K, S* a přímka *p* procházející bodem *S*.

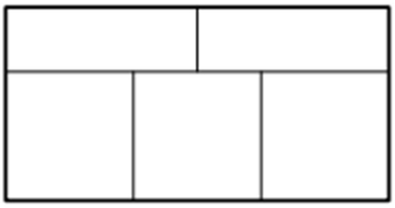


Bod *K* je vrchol obdélníku *KLMN*. Bod *S* je střed strany *KL* tohoto obdélníku. Přímka *p* prochází středem *S* strany *KL* a středem ještě jedné strany obdélníku *KLMN*. Sestrojte vrcholy *L, M, N* obdélníku *KLMN*, označte je písmeny a obdélník narýsujte. Najděte všechna řešení. Svůj postup popište.

Postup konstrukce:

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

4. Zahradník měl sad rozdělený na pět částí rozmístěných jako na obrázku. Jednotlivé části chtěl osázet jabloněmi, hrušněmi, třešněmi a meruňkami tak, aby v každé části byl pouze jeden druh ovocného stromu, každý z uvedených druhů byl zasazen a aby žádné dvě části sadu se stejným druhem ovocných stromů nesousedily. Kolika způsoby může zahradník osázet svůj sad?



5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet, a úlohu vyřeš:

$$600 - (6 \cdot 25 + 4 \cdot 80 + 3 \cdot 30)$$

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL14

Úloha 1. V hotelu Radost je možno ubytovat celkem 66 hostů. Jsou v něm pouze čtyřlůžkové, třílůžkové a dvojlůžkové pokoje, přičemž všech pokojů je 24. Kolik je v hotelu čtyřlůžkových, třílůžkových a dvojlůžkových pokojů víme-li, že počet dvojlůžkových pokojů je lichý?

Řešení:

x … počet čtyřlůžkových

y … počet třílůžkových

z … počet dvojlůžkových

$4x + 3y + 2z = 66$

$x + y + z = 24$

$y + z = 30$

---

x	y	z
8	2	14
7	**4**	**13**
6	6	12
5	**8**	**11**
4	10	10
3	**12**	**9**
2	14	8
1	**16**	**7**

Odpověď: Počet jednotlivých možností pokojů je v tabulce vyznačen tučně.

Úloha 2. Urči součet čísel následující řady:

$3 + 6 + 9 + 12 + \ldots\ldots + 264 + 267 + 270.$

Řešení:

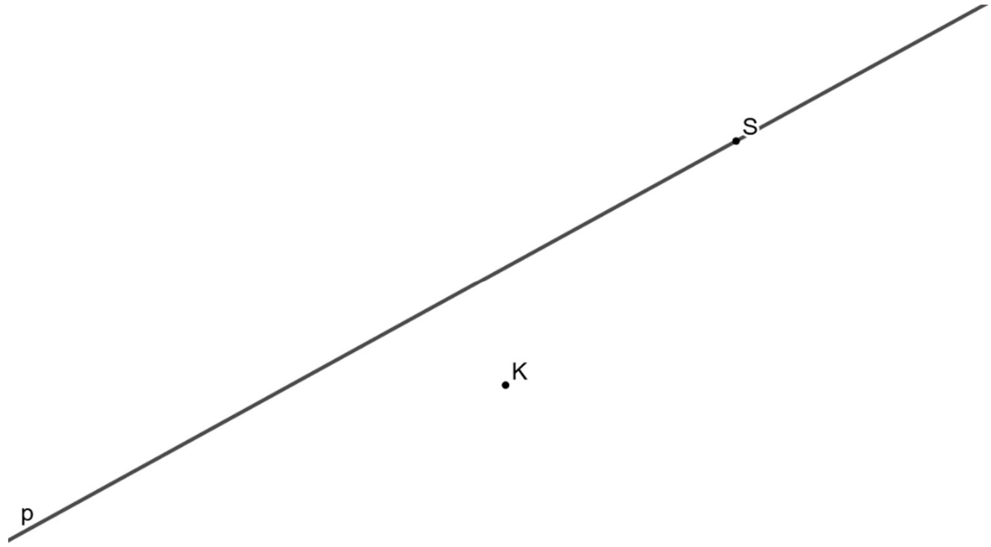
$3 + 6 + 9 + 12 + \ldots\ldots + 264 + 267 + 270 = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 88 + 89 + 90) =$

$= 3 \cdot 91 \cdot 45 = 12\,285$

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Odpověď: Součet číselné řady je 12 285.

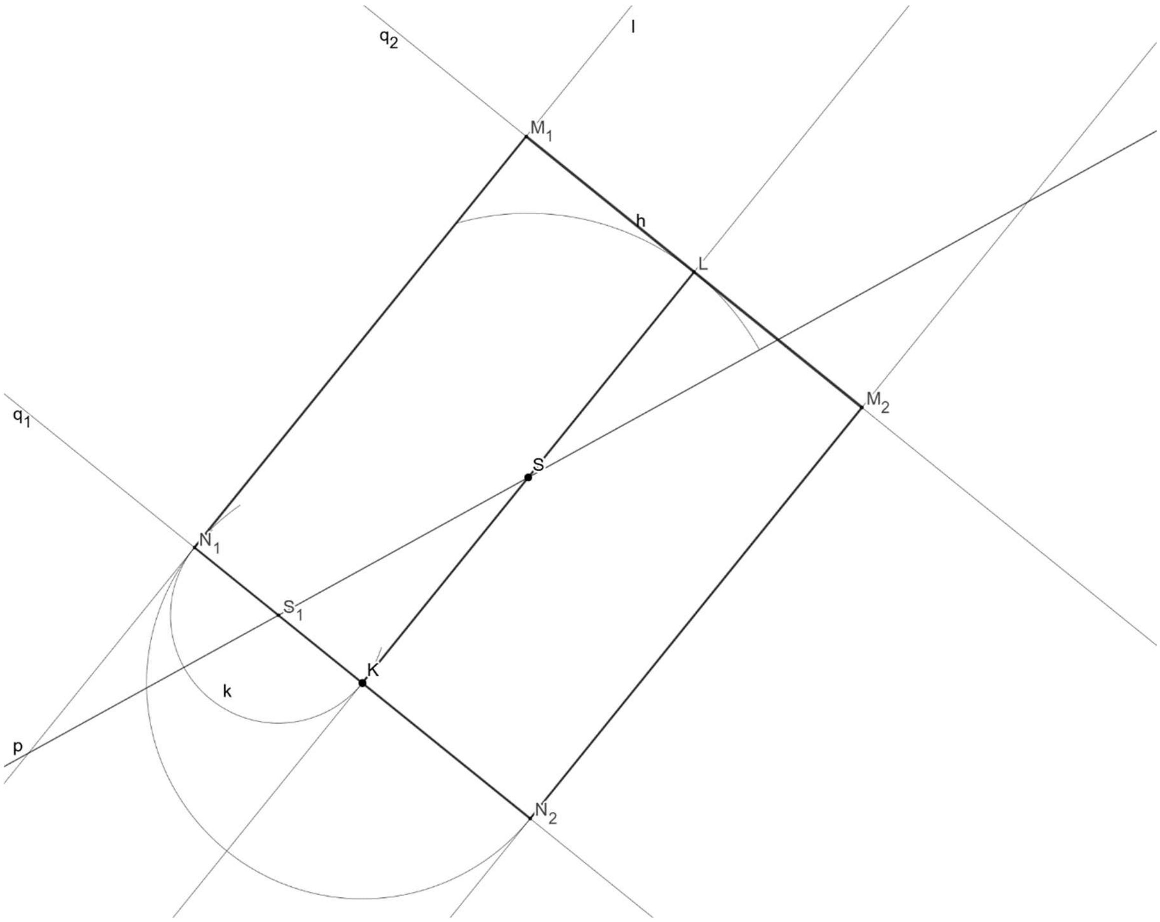
Úloha 3. V rovině leží body *K, S* a přímka *p* procházející bodem *S*.



Bod *K* je vrchol obdélníku *KLMN*. Bod *S* je střed strany *KL* tohoto obdélníku. Přímka *p* prochází středem *S* strany *KL* a středem ještě jedné strany obdélníku *KLMN*. Sestrojte vrcholy *L, M, N* obdélníku *KLMN*, označte je písmeny a obdélník narýsujte. Najděte všechna řešení. Svůj postup popište.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Řešení:



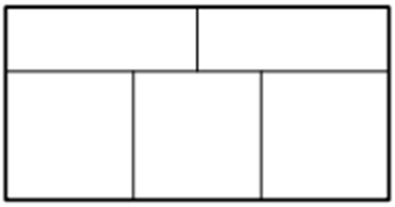
Popis konstrukce:

1. p, K, S
2. $h; h\ (S, r = |KS|)$
3. $L; L \in h \cap KS$
4. $q_1; q_1 \perp KS \wedge K \in q_1$
5. $q_2; q_2 \perp KS \wedge L \in q_2$
6. $S_1; S_1 \in p \cap q_1$
7. $k; k\ (S_1, r = |K S_1|)$
8. $N_1; N_1 \in k \cap q_1$
9. $N_2; N_2 \in q_1 \wedge |K N_1| = |K N_2|$
10. $j, l; j \parallel KS \wedge N_2 \in j; l \parallel KS \wedge N_1 \in l$
11. $M_1, M_2; M_1 \in l \cap q_2, M_2 \in j \cap q_2$
12. KLMN

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Odpověď: Úloha má v rovině dvě řešení.

Úloha 4. Zahradník měl sad rozdělený na pět částí rozmístěných jako na obrázku. Jednotlivé části chtěl osázet jabloněmi, hrušněmi, třešněmi a meruňkami tak, aby v každé části byl pouze jeden druh ovocného stromu, každý z uvedených druhů byl zasazen a aby žádné dvě části sadu se stejným druhem ovocných stromů nesousedily. Kolika způsoby může zahradník osázet svůj sad?



Řešení:

J … jabloně

H … hrušně

T … třešně

M … meruňky

Pokud v levém horním rohu sadu budou zasázeny jabloně, mohou být zasázeny ještě v pravém dolním rohu sadu. V tomto případě je možno šesti různými způsoby osázet zbývající části sadu třemi různými druhy ovocných stromů. Do levého horního a pravého dolního rohu je možno zasadit celkem čtyři druhy ovocných stromů, tj. $6 \cdot 4 = 24$ možností.

Pokud v pravém horním rohu sadu budou zasázeny jabloně, mohou být zasázeny ještě v levém dolním rohu sadu. V tomto případě je možno šesti různými způsoby osázet zbývající části sadu třemi různými druhy ovocných stromů. Do pravého horního a levého dolního rohu je možno zasadit celkem čtyři druhy ovocných stromů, tj. $6 \cdot 4 = 24$ možností.

Pokud v pravém dolním rohu sadu budou zasázeny jabloně, mohou být zasázeny ještě v levém dolním rohu sadu. V tomto případě je možno šesti různými způsoby osázet zbývající části sadu třemi různými druhy ovocných stromů. Do pravého dolního a levého dolního rohu je možno zasadit celkem čtyři druhy ovocných stromů, tj. $6 \cdot 4 = 24$ možností.

Celkem $24+24+24=72$ možností.

Odpověď: Zahradník může osázet svůj sad celkem 72 různými možnostmi.

Úloha 5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet, a úlohu vyřeš:

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

$$600 - (6 \cdot 25 + 4 \cdot 80 + 3 \cdot 30)$$

Řešení: Maminka šla nakoupit. Koupila 6 Hermelínů po 25 Kč, 4 másla po 80 Kč a 3 čokolády po 30 Kč. Kolik korun jí prodavačka vrátila u pokladny, když maminka zaplatila 600 Kč.

600 – (6 · 25 + 4 · 80 + 3 · 30) = 240

Odpověď: Prodavačka mamince vrátila 240 Kč.

Výsledky v úlohách PL14

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 14 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 14:

Tabulka 84 Úspěšnost úloh v PL14

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
14/1	15	Řízený experiment (7/16), aritmetická (7/16)
14/2	13	Aritmetická (15/16)
14/3	41	Konstrukční úloha – symbolický popis (3/16)
14/4	13	Aritmetická (14/16)

Úloha 5: zadání slovní úlohy odpovídalo početnímu příkladu (14/16), zadání slovní úlohy nebylo v kontextu s početním příkladem (1/16). Jeden žák nevymyslel zadání slovní úlohy odpovídající početnímu příkladu.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 15

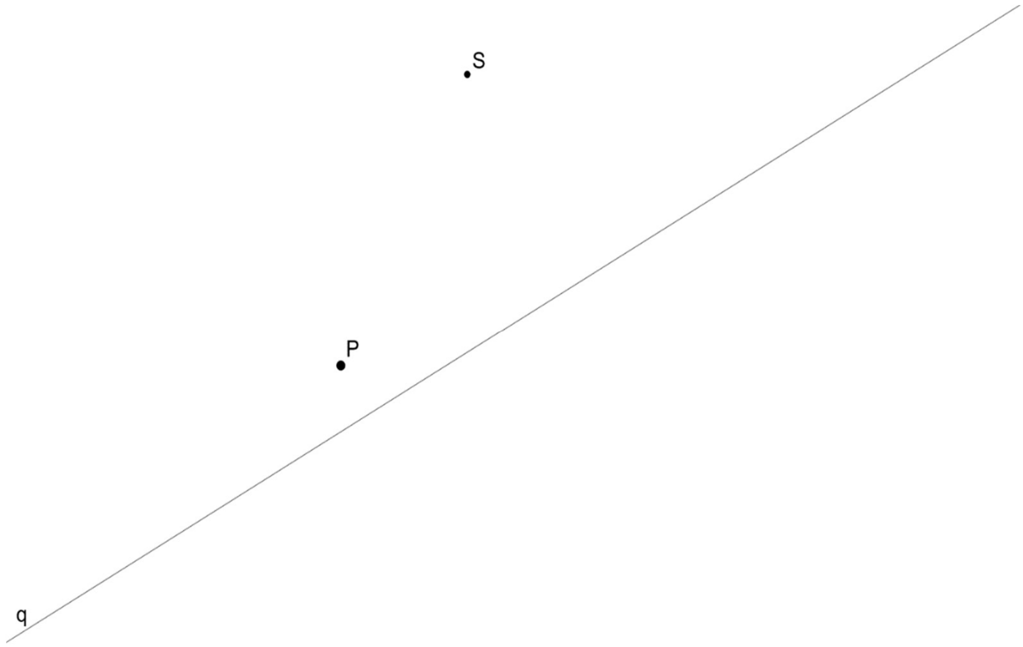
Jméno: ____________________

1. Zámek lze otevřít pomocí tříciferného kódu, který má na každé pozici jednu z cifer 0-9. Kolik existuje možností, pro které lze zámek otevřít, jestliže první a poslední číslice je sudá a prostřední číslice lichá?

2. Dne 1. března vykvetly na zahrádce 2 sněženky. Každý následující den na zahrádce vykvetlo o 5 sněženek více než předchozí den, Dne 15. března vykvetly poslední sněženky. Určete, kolik na zahrádce vykvetlo sněženek v tomto období.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. V rovině leží body *P, S* a přímka *q*.



Bod *P* je vrchol trojúhelníku *PQR*. Na přímce *q* leží vrchol *Q* tohoto trojúhelníku. Vrcholy *P* a *Q* mají od bodu *S* stejnou vzdálenost. Bod *S* je zároveň středem strany *QR*. Sestrojte vrcholy *Q, R* trojúhelníku *PQR* a trojúhelník narýsujte. Najděte všechna řešení. Svůj postup popište.

Postup konstrukce:

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

4. Mám 2 korunové, 2 dvoukorunové, 2 pětikorunové a 2 desetikorunové mince. Kolik různých částek mohu zaplatit právě třemi mincemi?

5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet, a úlohu vyřeš:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL15

Úloha 1. Zámek lze otevřít pomocí tříciferného kódu, který má na každé pozici jednu z cifer 0-9. Kolik existuje možností, pro které lze zámek otevřít, jestliže první a poslední číslice je sudá a prostřední číslice lichá?

Řešení: Na první pozici může být 5 cifer (0, 2, 4, 6, 8), na druhé pozici může být 5 cifer (1, 3, 5, 7, 9) a na třetí pozici může být 5 cifer (0, 2, 4, 6, 8), tedy $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Odpověď: Existuje celkem 125 možností, pro které lze zámek otevřít.

Úloha 2. Dne 1. března vykvetly na zahrádce 2 sněženky. Každý následující den na zahrádce vykvetlo o 5 sněženek více než předchozí den, Dne 15. března vykvetly poslední sněženky. Určete, kolik na zahrádce vykvetlo sněženek v tomto období.

Řešení:

$$2 + (2 + 5) + (2 + 2 \cdot 5) + (2 + 3 \cdot 5) + (2 + 4 \cdot 5) + \ldots\ldots + (2 + \cdot 14 \cdot 5) =$$

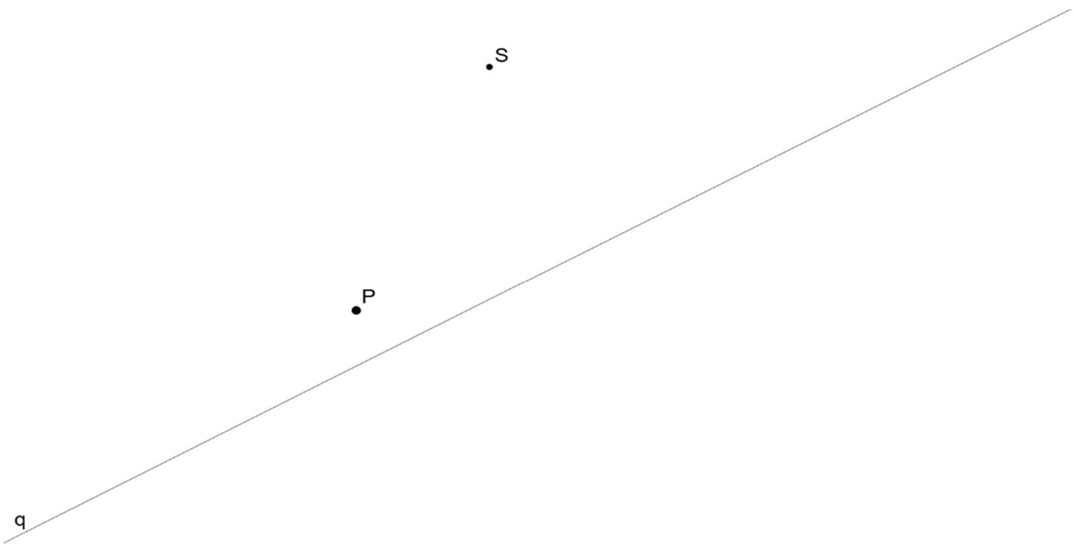
$$= 2 \cdot 15 + (5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + \ldots + 14 \cdot 5) =$$

$$= 2 \cdot 15 + (5 + 14 \cdot 5) + (2 \cdot 5 + 13 \cdot 5) + \ldots + (7 \cdot 5 + 8 \cdot 5) =$$

$$= 2 \cdot 15 + 15 \cdot 5 \cdot 7 = 30 + 15 \cdot 35 = 555$$

Odpověď: Na zahrádce vykvetlo v tomto období 555 sněženek.

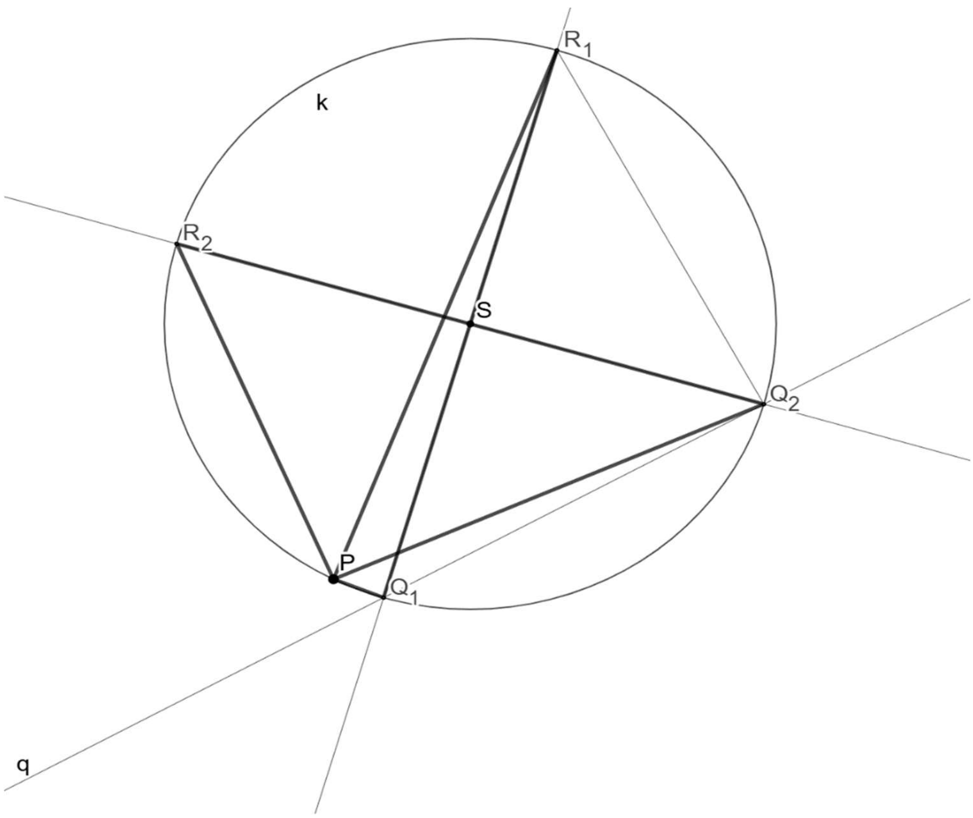
Úloha 3. V rovině leží body *P, S* a přímka *q*.



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Bod *P* je vrchol trojúhelníku *PQR*. Na přímce *q* leží vrchol *Q* tohoto trojúhelníku. Vrcholy *P* a *Q* mají od bodu *S* stejnou vzdálenost. Bod *S* je zároveň středem strany *QR*. Sestrojte vrcholy *Q, R* trojúhelníku *PQR* a trojúhelník narýsujte. Najděte všechna řešení. Svůj postup popište.

Řešení:



Popis konstrukce:

1. q, *P, S*

2. k; k (*S*, r = |P*S*|)

3. Q_1, Q_2; $Q_1, Q_2 \in q \cap k$

4. R_1, R_2; $R_1 \in Q_1S \cap k$; $R_2 \in Q_2S \cap k$

5. $\Delta\, PQ_1R_1$; $\Delta\, PQ_2R_2$

Odpověď: Úloha má v rovině dvě řešení.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Úloha 4. Mám 2 korunové, 2 dvoukorunové, 2 pětikorunové a 2 desetikorunové mince. Kolik různých částek mohu zaplatit právě třemi mincemi?

Řešení: Máme tyto možnosti na zaplacení:

1,1,2 částka 4 Kč	2,2,5 částka 9 Kč	1,2,10 částka 13 Kč
1,1,5 částka 7 Kč	2,2,10 částka 14 Kč	5, 5, 10 částka 20 Kč
1,1, 10 částka 12 Kč	2, 5, 5 částka 12 Kč	10, 10, 2 částka 22 Kč
1,10,10 částka 21 Kč	2, 5, 10 částka 17 Kč	10, 10, 5 částka 25 Kč
1,2,2 částka 5 Kč	1,5, 5 částka 11 Kč	
1,2,5 částka 8 Kč	1,5, 10 částka 16 Kč	

Existují tyto možnosti částek k úhradě: 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 20, 21, 22, 25.

Odpověď: Celkem existuje 15 možností.

Úloha 5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet, a úlohu vyřeš:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Řešení: Z krychle o délce hrany 5 cm jsme vyřízli krychli o délce hrany 2 cm. Jaký objem má takto vytvořené těleso?

$$5 \cdot 5 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 125 - 8 = 117$$

Odpověď: Nově vytvořené těleso bude mít objem 117 cm^3.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL15

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 15 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 15:

Tabulka 95 Úspěšnost úloh v PL15

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
15/1	33	Aritmetická (17/18)
15/2	50	Aritmetická (18/18)
15/3	78	Konstrukční úloha – symbolický popis (5/18), slovní popis (8/18)
15/4	22	Řízený experiment (14/18)

Úloha 5: zadání slovní úlohy odpovídalo početnímu příkladu (5/18), zadání slovní úlohy nebylo v kontextu s početním příkladem (6/18). 7 žáků nevymyslelo žádnou slovní úlohu odpovídající početnímu příkladu.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 16

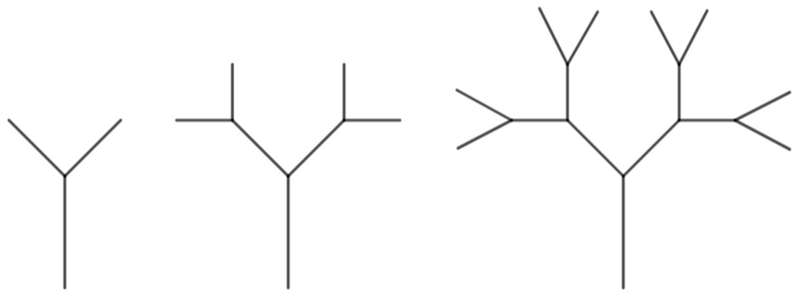
Jméno: ____________________

1. V městě, kde každý obyvatel buď mluví vždy pravdu, nebo vždy lže, sedí na lavičce dva kamarádi. Když se jich zeptáš, zda mluví pravdu, nebo lžou, první z nich odpoví:

„Já jsem lhář a kamarád vedle mě lhář není.“

Rozhodni o každém z kamarádů, zda mluví pravdu, nebo lže. Rozhodnutí zdůvodni.

2. Na obrázku je vidět 1., 2. a 3. obrazec. První obrazec je sestaven ze tří úseček, druhý ze sedmi úseček a tak dále. Každý obrazec vznikne z předchozího obrazce podle určitého pravidla. Urči, kolik úseček bude mít 4. obrazec a kolik 5. obrazec.



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. V příkladu změň tři znaménka + na – tak, aby byl výsledek stále dělitelný pěti. Najdi všechna řešení.

$$10 + 8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 2 = 40$$

4. V cukrárně je v nabídce 6 různých zmrzlinových pohárů, v každém z těchto pohárů jsou dva kopečky zmrzliny a každý kopeček má jinou příchuť. Kolik nejméně musí mít v cukrárně příchutí zmrzliny, aby v žádných dvou pohárech nebyla stejná dvojice příchutí?

5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet, úlohu vyřeš.

$$\frac{12}{4} + \frac{3}{4}$$

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL16

Úloha 1. V městě, kde každý obyvatel buď mluví vždy pravdu, nebo vždy lže, sedí na lavičce dva kamarádi. Když se jich zeptáš, zda mluví pravdu, nebo lžou, první z nich odpoví:

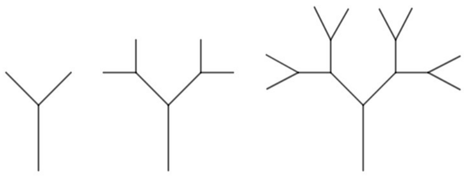
„Já jsem lhář a kamarád vedle mě lhář není.“

Rozhodni o každém z kamarádů, zda mluví pravdu, nebo lže. Rozhodnutí zdůvodni.

Řešení: Uvedený výrok mohl vyslovit pouze lhář (aby byl celý výrok pravdivý, musí být obě jeho části pravdivé, aby byl celý výrok nepravdivý, stačí, že je nepravdivá alespoň jeho část). První část výroku je tedy pravdivá, proto druhá část musí být nepravdivá. Z toho plyne, že oba občané jsou lháři.

Odpověď: Oba občané jsou lháři.

Úloha 2. Na obrázku je vidět 1., 2. a 3. obrazec. První obrazec je sestaven ze tří úseček, druhý ze sedmi úseček a tak dále. Každý obrazec vznikne z předchozího obrazce podle určitého pravidla. Urči, kolik úseček bude mít 4. obrazec a kolik 5. obrazec.



Řešení: Shrňme si počty úseček v jednotlivých obrazcích: 1. obrazec je složen ze 3 úseček, 2. obrazec ze 3+4=7 úseček, 3. obrazec ze 7+8=15 úseček. V každém dalším obrazci přibude 2^n úseček, kde n je pořadí obrazce. Proto 4. obrazec bude složen z 15+16=31 úseček a 5. obrazec z 31+32=63 úseček.

Pravidlo produkující další obrazce může být také chápáno tak, že předchozí obrazec tvoří vždy jednu ze dvou větví dalšího obrazce, k nimž je ještě přidána jedna úsečka jako „kmen“.

Odpověď: Čtvrtý obrazec je složen z 31 úseček a pátý obrazec je složen z 63 úseček.

Úloha 3. V příkladu změň tři znaménka + na – tak, aby byl výsledek stále dělitelný pěti. Najdi všechna řešení.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

$$10 + 8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 2 = 40$$

Řešení: Aby byl výsledek příkladu stále dělitelný pěti, je nutné odečítat hodnotu, která je násobkem pěti. Úkolem je tedy nalézt trojice z čísel 8, 7, 6, 4, 3 a 2, které dávají v součtu číslo dělitelné pěti. Takové trojice jsou: 8, 4 a 3, nebo 7, 6 a 2.

Odpověď: $10 - 8 + 7 + 6 - 4 - 3 + 2 = 10$ $\qquad$ $10 + 8 - 7 - 6 + 4 + 3 - 2 = 10$

Úloha 4. V cukrárně je v nabídce 6 různých zmrzlinových pohárů, v každém z těchto pohárů jsou dva kopečky zmrzliny a každý kopeček má jinou příchuť. Kolik nejméně musí mít v cukrárně příchutí zmrzliny, aby v žádných dvou pohárech nebyla stejná dvojice příchutí?

Řešení: Je vhodné postupovat systematicky a k co nejnižšímu počtu příchutí postupně přidávat další. Uvažujeme-li například zmrzlinu vanilkovou (V) a čokoládovou (Č), můžeme vytvořit pouze jeden pohár, a to VČ. Přidáme-li příchuť jahodovou (J), získáváme navíc poháry VJ a VČ. Po přidání čtvrté příchutě, například karamelové (K), přibydou poháry VK, ČK a JK, čímž získáváme 6 pohárů.

Odpověď: V cukrárně musí mít nejméně 4 příchutě.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL16

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 16 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 16:

Tabulka 16 Úspěšnost úloh v PL16

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
16/1	29	Řízený experiment (11/17), nelze identifikovat (6/17)
16/2	85	Aritmetická (14/17), nelze identifikovat (3/17)
16/3	50	Aritmetická (13/17), nelze identifikovat (4/17)
16/4	76	Aritmetická (15/17), nelze identifikovat (2/17)

Úlohu 5 vyřešilo správně 9 žáků ze 17. Jeden žák nechal úlohu neřešenou. Zadání bez kontextu uvedlo 7 žáků.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

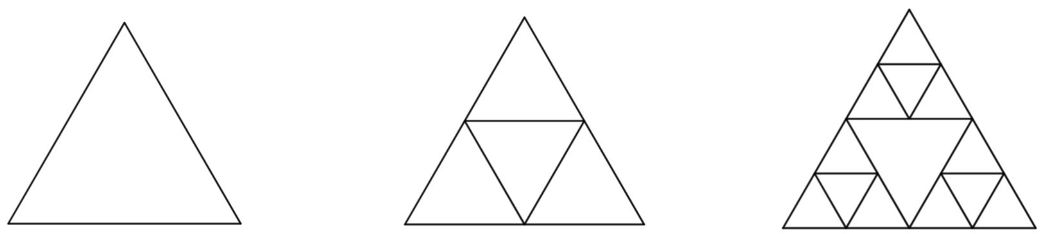
Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 17

Jméno: ____________________

1. Jarda má v kasičce 50 Kč ve dvoukorunových mincích. Každý den si z kasičky vezme buď 4 koruny na bonbon, nebo 6 korun na žvýkačku. Za kolik dní může kasičku vyprázdnit, jestliže žádné peníze do kasičky nepřidává? Uveď všechny možnosti.

2. Na obrázku jsou zobrazeny první tři obrazce. Každý následující obrazec je vytvořen z předchozího obrazce podle určitého pravidla. Urči, kolik trojúhelníků bude mít čtvrtý obrazec.



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Na táboře je potřeba každý den zvolit tři táborníky, kteří budou mít službu na vaření oběda, a to po dobu deseti dnů. Aby se táborníci při vaření oběda nenudili, je nutné, aby neměla žádný z deseti dnů službu stejná trojice táborníků. Urči, kolik nejméně táborníků je třeba, aby bylo možné sestavit různé trojice pro službu na deset dnů.

4. V městě, kde každý obyvatel buď mluví vždy pravdu, nebo vždy lže, sedí na lavičce dva kamarádi. Když se jich zeptáš, zda mluví pravdu, nebo lžou, první z nich odpoví: „Jeden z nás nemluví pravdu.“ Rozhodni o každém z kamarádů, zda mluví pravdu, nebo lže. Rozhodnutí zdůvodni.

5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet, úlohu vyřeš.

$$\frac{7}{3} - \frac{4}{3}$$

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL17

Úloha 1. Jarda má v kasičce 50 Kč ve dvoukorunových mincích. Každý den si z kasičky vezme buď 4 koruny na bonbon, nebo 6 korun na žvýkačku. Za kolik dní může kasičku vyprázdnit, jestliže žádné peníze do kasičky nepřidává? Uveď všechny možnosti.

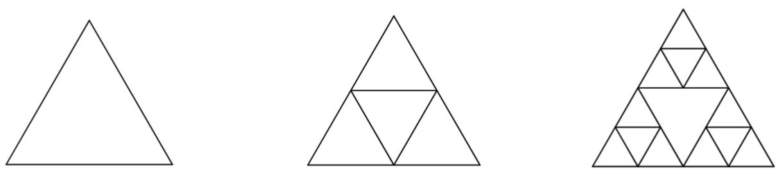
Řešení:

Při řešení úlohy můžeme postupovat tak, že uvážíme největší možný počet nakoupených žvýkaček a následně budeme jejich počet snižovat a zároveň zvyšovat počet bonbonů. Za žvýkačky může Jarda utratit maximálně 42 korun (pro 48 korun by se již nepodařilo kasičku vyprázdnit), v tom případě by utratil 8 korun za bonbony. Koupil by si tedy 7 žvýkaček a 2 bonbony, kasičku vyprázdnil za 9 dnů. Všechny možné varianty útraty jsou znázorněny v tabulce.

Cena žvýkaček (Kč)	42	30	18	6
Cena bonbonů (Kč)	8	20	32	44
Počet dnů	9	10	11	12

Odpověď: Jarda mohl vyprázdnit kasičku za 9, 10, 11 nebo 12 dnů.

Úloha 2. Na obrázku jsou zobrazeny první tři obrazce. Každý následující obrazec je vytvořen z předchozího obrazce podle určitého pravidla. Urči, kolik trojúhelníků bude mít čtvrtý obrazec.



Řešení:

V každém dalším obrazci přibyly v každém trojúhelníku orientovaném stejně jako první obrazec 4 trojúhelníky, čtvrtý obrazec tedy bude mít $1+4+3\cdot 4+9\cdot 4=53$ trojúhelníků.

Odpověď: Čtvrtý obrazec bude mít 53 trojúhelníků.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Úloha 3. Na táboře je potřeba každý den zvolit tři táborníky, kteří budou mít službu na vaření oběda, a to po dobu deseti dnů. Aby se táborníci při vaření oběda nenudili, je nutné, aby neměla žádný z deseti dnů službu stejná trojice táborníků. Urči, kolik nejméně táborníků je třeba, aby bylo možné sestavit různé trojice pro službu na deset dnů.

Řešení:

Situaci si lze znázornit, táborníky označíme písmeny A, B, C, D a tak dále. Začněme tvořit různé trojice z písmen od začátku abecedy, vždy, když to bude nutné, přidáme do skupiny další písmeno.

ABC, ABD, ACD, BCD, ABE, ACE, ADE, BCE, BDE, CDE

Odpověď: Z pěti táborníků lze sestavit deset různých trojic.

Úloha 4. V městě, kde každý obyvatel buď mluví vždy pravdu, nebo vždy lže, sedí na lavičce dva kamarádi. Když se jich zeptáš, zda mluví pravdu, nebo lžou, první z nich odpoví: „Jeden z nás nemluví pravdu.“ Rozhodni o každém z kamarádů, zda mluví pravdu, nebo lže. Rozhodnutí zdůvodni.

Řešení:

Pokud by první z kamarádů říkal pravdu, musel by druhý z nich být lhář. Pokud by první z kamarádů lhal, musel by druhý také lhát. Víme tedy, že druhý z kamarádů je lhář, o prvním neumíme rozhodnout.

Odpověď: Druhý z kamarádů je lhář, první může být pravdomluvec i lhář.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL17

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 17 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 17:

Tabulka 17 Úspěšnost úloh v PL17

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
17/1	75	Aritmetická (15/16), nelze identifikovat (1/16)
17/2	50	Aritmetická (16/16)
17/3	75	Aritmetická (14/16)
17/4	66	Nelze identifikovat (11/16), řízený experiment (4/16)

Úlohu 5 vyřešilo správně 11 žáků ze 16. Jeden žák nechal úlohu neřešenou. Zadání bez kontextu uvedli 4 žáci.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

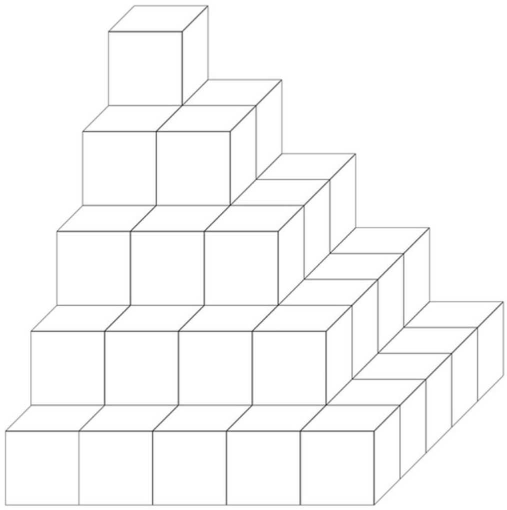
Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 18

Jméno: ____________________

1. Jana šla na výlet do ZOO a přišla k výběhu, ve kterém se nacházeli pouze pštrosi a zebry. Napočítala, že mají dohromady 38 očí, což bylo o 22 méně než napočítaných nohou. O kolik se lišil počet zeber a pštrosů ve výběhu?

2. Na obrázku je stavba z několika malých krychlí. Urči, kolik malých krychlí je potřeba přidat tak, aby se stavba doplnila na úplnou krychli? Do nejspodnějšího patra nelze již přidat žádnou malou krychli.



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Petra měla určitý počet sirek a odhadem věděla, že jich má více než 40 a méně než 50. Skládala z nich postupně obrazce připomínající trojúhelníky, poté čtverce, dále šestiúhelníky a nakonec osmiúhelníky. Vždy, když použila všechny sirky na skládání daného obrazce, zůstala jí jedna sirka. Kolik sirek celkem měla?

4. Vymysli a zapiš zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet. Úlohu vyřeš.

$$53{,}6 + 78{,}9$$

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL18

Úloha 1. Jana šla na výlet do ZOO a přišla k výběhu, ve kterém se nacházeli pouze pštrosi a zebry. Napočítala, že mají dohromady 38 očí, což bylo o 22 méně než napočítaných nohou. O kolik se lišil počet zeber a pštrosů ve výběhu?

Řešení: Měli 38 očí, z čehož vyplývá, že jich bylo 19 a 60 nohou. Pokud bychom přiřadili každému ze zvířat 2 nohy, zůstalo by nám rozdat ještě 22 nohou. Tedy 11 zvířat by mělo 4 nohy a 8 zvířat dvě nohy. Zeber bude 11 a pštrosů 8.

Odpověď: Počet zeber a pštrosů se liší o 3.

Úloha 2. Na obrázku je stavba z několika malých krychlí. Urči, kolik malých krychlí je potřeba přidat tak, aby se stavba doplnila na krychli? Do nejspodnějšího patra nelze již přidat žádnou malou krychli.

Řešení: Celkem obsahu doplněná krychle 5x5x5 = 125, 125 krychlí, již bylo použito 25 + 16 + 9 + 4 +1 = 55, 55 krychlí, tedy je potřeba přidat 70 krychlí (125-55).

Odpověď: Je potřeba přidat 70 krychlí.

Úloha 3. Petra měla určitý počet sirek a odhadem věděla, že jich má více než 40 a méně než 50. Skládala z nich postupně obrazce připomínající trojúhelníky, poté čtverce, dále šestiúhelníky a nakonec osmiúhelníky. Vždy, když použila všechny sirky na skládání daného obrazce, zůstala jí jedna sirka. Kolik sirek celkem měla?

Řešení: Násobky čísla 3 větší než 40 a menší než 50: 42, 45, 48

Násobky čísla 4 větší než 40 a menší než 50: 44, 48

Násobky čísla 6 větší než 40 a menší než 50: 42, 48

Násobky čísla 8 větší než 40 a menší než 50: 48

Společný násobek čísel 3, 4, 6 a 8 je 48, tedy sirek bylo 49

Odpověď: Petra měla 49 sirek.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL18

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 18 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 18:

Tabulka 18 Úspěšnost úloh v PL18

PL/Úloha číslo	**Úspěšnost (%)**	**Dvě nejčastěji volené strategie**
18/1	40	Aritmetická (9/16), nelze identifikovat (3/16)
18/2	87	Aritmetická (13/16), nelze identifikovat (3/16)
18/3	87	Aritmetická (6/16), pokus–omyl (6/16)
18/4	40	

Úlohu 4 vyřešilo správně 6 žáků z 16. Čtyři žáci nechali úlohu neřešenou. Nejčastějším nedostatkem bylo vymyšlení zadání, které neodpovídalo zadanému příkladu (4 žáci), bez kontextu slovní úlohu vymyslel 1 žák. Žáků, kteří příklad vypočítali správně bylo 11.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

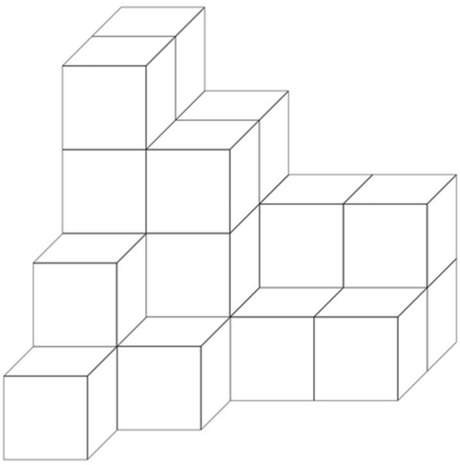
Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 19

Jméno: ____________________

1. Marek vyráběl sušenky ve tvaru hvězd pro vánoční trh z pěti dávek těsta. Po vykrojení každých tří hvězd mu vždy zbylo tolik těsta, že po opětovném vyválení mohl vykrojit ještě jednu další hvězdu. Kolik hvězd celkem vykrojil, pokud při prvním vyválení vykrojil 30 hvězd?

2. Na obrázku je stavba složena z několika malých krychlí. Za zadní ani levou stěnou stavby se nenachází žádné další malé krychle. Všechny dostupné plochy tělesa obarvíme na fialovo. Vypočítej celkový obsah fialových ploch, pokud hrana malé krychle má délku 10 cm. Dále urči, jaký **nejmenší** počet malých krychlí je potřeba přidat tak, aby ze stavby vznikla krychle.



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Na parkovišti stojí 37 vozidel (auta a motocykly), což je o 95 méně než počet jejich kol celkem. Kolik aut a kolik motocyklů je na parkovišti, pokud každé auto a motocykl má standardní počet kol?

4. Petr a Tomáš četli stejnou fantasy knihu. Petr četl 21 stran denně a četba mu trvala o 6 dní méně než Tomášovi, který četl patnáct stran každý den. Kolik stran má kniha?

5. Vymysli a zapiš zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet. Úlohu vyřeš.

$$168 - 23{,}6 \cdot 5$$

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL19

Úloha 1. Marek vyráběl sušenky ve tvaru hvězd pro vánoční trh z pěti dávek těsta. Po vykrojení každých tří hvězd mu vždy zbylo tolik těsta, že po opětovném vyválení mohl vykrojit ještě jednu další hvězdu. Kolik hvězd celkem vykrojil, pokud při prvním vyválení vykrojil 30 hvězd?

Řešení: $5 \cdot (30 + 10 + 3 + 1) = 5 \cdot 44 = 220$
Odpověď: Marek vykrojil celkem 220 hvězd.

Úloha 2. Na obrázku je stavba složena z několika malých krychlí. Za zadní ani levou stěnou stavby se nenachází žádné další malé krychle. Všechny dostupné plochy tělesa obarvíme na fialovo. Vypočítej celkový obsah fialových ploch, pokud hrana malé krychle má délku 10 cm. Dále urči, jaký **nejmenší** počet malých krychlí je potřeba přidat tak, aby ze stavby vznikla krychle.

Řešení: Počet ploch (stěn tvaru čtverce), které se obarvily, je 66, obsah jedné plochy je 100 cm^2, tedy celkově bude obarveno 6600 cm^2.

Aby vznikla ze stavby krychle, musíme do spodního patra přidat 5 krychlí, do dalšího patra 9 krychlí, do třetího patra odspodu 12 krychlí a do nejvrchnějšího patra 14 krychlí, celkem $5 + 9 + 12 + 14 = 40$

Odpověď: Obsah fialových ploch je 6600 cm^2. Musíme přidat 40 krychlí, aby ze stavby vznikla krychle.

Úloha 3. Na parkovišti stojí 37 vozidel (auta a motocykly), což je o 95 méně než počet jejich kol celkem. Kolik aut a kolik motocyklů je na parkovišti?

Řešení: 37 vozidel, 132 kol, uvažme, že každému autu a motocyklu přiřadíme 2 kola: 132 – 74 = 58 (počet zbývajících kol), 58 : 2 = 29 (po dalším přiřazení kol)

Odpověď: Na parkovišti je 29 aut a 8 motocyklů.

Úloha 4. Petr a Tomáš četli stejnou fantasy knihu. Petr četl 21 stran denně a četba mu trvala o 6 dní méně než Tomášovi, který četl patnáct stran každý den. Kolik stran má kniha?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Řešení: Hledáme společné násobky čísel 21 a 15. Takovýmto násobkem, který splňuje podmínku, že po vydělení čísly 21 a 15 mají podíly rozdíl 6, je číslo 315

Odpověď: Kniha má 315 stran.

Výsledky v úlohách PL19

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 19 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 19:

Tabulka 19 Úspěšnost úloh v PL19

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
19/1	13	Aritmetická (14/15), nelze identifikovat (1/15)
19/2a	33	Aritmetická (9/15), nelze identifikovat (6/15)
19/2b	60	Aritmetická (9/15), nelze identifikovat (6/15)
19/3	80	Aritmetická (7/15), pokus–omyl (6/15)
19/4	80	Aritmetická (11/15), pokus–omyl (3/15)

Zadání slovní úlohy vzhledem k zadanému příkladu správně vymysleli 2 žáci z 15. Pět žáků úlohu neřešilo, 6 žáků zadání vymyslelo chybně a 2 žáci uvedli slovní úlohu bez kontextu. Žáků, kteří zadaný příklad vypočítali správně, bylo 10.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 20

Jméno: ____________________

1. V jednom výběhu na farmě jsou ovce, kozy a slepice. Celkem napočítáme 50 hlav, což je o 98 méně než počet jejich nohou. Víme, že počet koz je třikrát menší než počet ovcí. Kolik je ve výběhu ovcí, koz a slepic, pokud všechna zvířata mají standardní počet hlav a nohou?

2. Doplň další dvě čísla v číselné řadě podle určitého pravidla. Pravidlo zapiš.

   24; 8; 32; 12; 40; 16; __; __

   3; 31; 8; 24; 14; 18; 21; 13; __; __

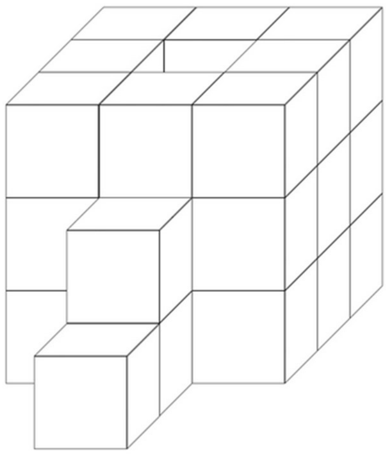
   4; 6; 13; 22; 38; __; __

   Vymyslete vlastní číselnou řadu. Sepište pravidlo.

3. Pan Králík chová různá zvířata. Má jich více než 100, ale méně než 130. Křečci tvoří devítinu a morčata čtvrtinu celkového počtu zvířat. Kolik zvířat celkem pan Králík chová?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

4. Na obrázku je stavba složena z několika malých krychlí, každá malá krychle má hranu délky 3 cm. Za zadní ani levou stěnou stavby se nenachází žádné další malé krychle. Tři malé krychle ze stavby jsou odstraněny a dány dopředu před stavbu (viz obrázek). Všechny dostupné plochy stavby nyní obarvíme zelenou barvou (i zespodu). Vypočítej celkový obsah zelených ploch. Dále urči, jaký **nejmenší** počet malých krychlí je potřeba přidat tak, aby ze stavby vznikla krychle.



5. Vymysli a zapiš zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet. Úlohu vyřeš.

$$72{,}8 : 4 + 325$$

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL20

Úloha 1. V jednom výběhu na farmě jsou ovce, kozy a slepice. Celkem napočítáme 50 hlav, což je o 98 méně než počet jejich nohou. Víme, že počet koz je třikrát menší než počet ovcí. Kolik je ve výběhu ovcí, koz a slepic, pokud všechna zvířata mají standardní počet hlav a nohou?

Řešení: 50 hlav, 148 nohou. Pokud každé z hlav přiřadíme 2 nohy, zůstane nám k přiřazení ještě 48 noh. Začneme k hlavám přiřazovat 2 nohy, tedy 24 hlav bude mít 4 nohy, 26 hlav bude mít 2 nohy. Ze zadání víme, že počet koz je třikrát menší než počet ovcí, tedy počet koz bude 6, počet ovcí 18 a počet slepic 26.

Odpověď: Počet ovcí ve výběhu je 18, koz je 6 a slepic 26.

Úloha 2. Doplň další dvě čísla v číselné řadě podle určitého pravidla. Pravidlo zapiš.

24; 8; 32; 12; 40; 16; __; __

3; 31; 8; 24; 14; 18; 21; 13; __; __

4; 6; 13; 22; 38; __; __

Vymyslete vlastní číselnou řadu. Sepište pravidlo.

Řešení: První, třetí, páté číslo v pořadí a tak dále se zvětšuje o 8, druhé, čtvrté, šesté číslo v pořadí od začátku se zvětšuje o 4, tedy následující čísla v pořadí budou **48 a 20**

První a třetí číslo od začátku řady se zvětšuje o 5, poté třetí a páté číslo v řadě se zvětšuje o 6, dále podle stejného principu o 7, atd. Druhé a čtvrté číslo se zmenšuje o 7, dále čtvrté a šesté se zmenšuje o 6, takže další čísla v řadě budou **29 a 9**

Součet prvních dvou čísel je 10, 10 + 3 = 13, součet dalších čísel je 6 + 13 = 19, 19 + 3 = 22, dále 12 + 22 = 35, 35 + 3 = 38, tedy doplněná čísla budou 22 + 38 = 60, 60 + 3 = **63**; dále 38 + 63 = 101, 101 + 3 = **104**

Odpověď: 48; 20

29; 9

63; 104

Úloha 3. Pan Králík chová různá zvířata. Má jich více než 100, ale méně než 130. Křečci tvoří devítinu a morčata čtvrtinu celkového počtu zvířat. Kolik zvířat celkem pan Králík chová?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Řešení: Počet zvířat musí být číslo, které je dělitelné 9 a zároveň 4 a musí být větší než 100 a menší než 130. Společné násobky čísel 9 a 4 jsou: 36, 72, 108, 144. Tedy počet je 108.

Odpověď: Pan Králík celkem chová 108 zvířat.

Úloha 4. Na obrázku je stavba složena z několika malých krychlí, každá malá krychle má hranu délky 3 cm. Za zadní ani levou stěnou stavby se nenachází žádné další malé krychle. Tři malé krychle ze stavby jsou odstraněny a dány dopředu před stavbu (viz obrázek). Všechny dostupné plochy stavby nyní obarvíme zelenou barvou (i zespodu). Vypočítej celkový obsah zelených ploch. Dále urči, jaký **nejmenší** počet malých krychlí je potřeba přidat tak, aby ze stavby vznikla krychle.

Řešení: 74 ploch tvaru čtverce k natření, obsah zelených ploch o délce strany čtverce 3 cm vypočítáme jako $74 \cdot 3 \cdot 3 = 666$

Po doplnění na kvádr musíme přidat 18 malých krychlí. Máme tedy stavbu z 45 krychlí. Dále musí být celá krychle ze 125 krychlí, abychom stavbu doplnili na krychli. Musíme jich tedy přidat 80 (125 – 45)

Abychom stavbu doplnili na krychli a počet přidaných krychlí byl co nejmenší, vznikne krychle 5x5x5. Tedy krychle bude mít 125 krychlí. V současné stavbě máme 27 krychlí, tedy je potřeba doplnit ještě 98 krychlí (125 – 27), aby vznikla krychle přidáním co nejmenšího počtu krychliček.

Odpověď: Obsah zelené plochy je 666 cm^2.

Je potřeba přidat 98 krychlí tak, aby ze stavby vznikla krychle.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL20

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 20 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 20:

Tabulka 20 Úspěšnost úloh v PL20

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
20/1	65	Pokus–omyl (10/17), aritmetická (4/17)
20/2a	100	Nelze identifikovat (10/17), aritmetická (7/17)
20/2b	82	Nelze identifikovat (10/17), aritmetická (6/17)
20/2c	47	Nelze identifikovat (10/17), aritmetická (6/17)
20/3	100	Nelze identifikovat (8/17), aritmetická (6/17)
20/4a	53	Aritmetická (17/17)
20/4b	24	Aritmetická (9/17), nelze identifikovat (7/17)

Zadání slovní úlohy vzhledem k zadanému příkladu správně vymyslelo 9 žáci ze 17. Pět žáků úlohu neřešilo, 2 žáci zadání vymysleli chybně a 1 žák uvedl slovní úlohu bez kontextu. Žáků, kteří zadaný příklad vypočítali správně, bylo 9.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 21

Jméno: ____________________

1. Součet tří čísel je 53. Pro čísla přitom platí: První číslo je o třetinu menší než druhé číslo. Třetí číslo je o pět větší než druhé číslo. Urči, o která čísla se jedná.

2. Na obrázku je znázorněna rovnoramenná váha. Urči hodnotu závaží ve tvaru hvězdičky, jestliže víš, že hodnota závaží ve tvaru kruhu je 2.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Pro obdélník $ABCD$ platí: Jeho obsah je roven 180 dm^2, strana b je o 3 dm delší než strana a. Urči rozměry tohoto obdélníku.

4. Doplň cifry 1, 2, 2, 3, 8, 9, 9 tak, aby byl výsledný součet správný:

$$\begin{array}{cccc} \_\_ & \_\_ & 8 & \_\_ \\ & \_\_ & 1 & 6 \\ \hline 4 & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{array}$$

5. Vymysli zadání slovní úlohy, jejž řešení bude obsahovat výpočet

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + 2\right)$$

Úlohu vyřeš.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorská řešení PL21

Úloha 1: Součet tří čísel je 53. Pro čísla přitom platí: První číslo je o třetinu menší než druhé číslo. Třetí číslo je o pět větší než druhé číslo. Urči, o která čísla se jedná.

Řešení: Úlohu budeme řešit aritmeticky. Když od celkového součtu odečteme 5, zůstane nám osm třetin (osm stejných dílků):

$$53 - 5 = 48$$

$$48 : 8 = 6$$

$$6 \cdot 2 = 12$$

Hledaná čísla tedy jsou 12, 18 a 23.

Zkouška: $12 + 18 + 23 = 53$; $18 - 18 : 3 = 18 - 6 = 12$; $18 + 5 = 23$.

Odpověď: Jedná se o čísla 12, 18 a 23.

Úloha 2: Na obrázku je znázorněna rovnoramenná váha. Urči hodnotu závaží ve tvaru hvězdičky, jestliže víš, že hodnota závaží ve tvaru kruhu je 2.

Řešení: Lze škrtáním na váze, nebo rovnicí. Jako neznámou x označíme hodnotu závaží ve tvaru hvězdičky.

$$2x + 6 = 4x + 4$$

$$6 = 2x + 4$$

$$2 = 2x$$

$$1 = x$$

Zkouška: Na levé straně váhy je hodnota $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$. Na pravé straně váhy je hodnota $4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8$. Jednotlivé strany váhy si odpovídají.

Odpověď: Závaží ve tvaru hvězdičky má hodnotu 1.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Úloha 3: Doplň cifry 1, 2, 2, 3, 8, 9, 9 tak, aby byl výsledný součet správný:

$$\begin{array}{cccc} \_\_\_ & \_\_\_ & 8 & \_\_\_ \\ & \_\_\_ & 1 & 6 \\ \hline 4 & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{array}$$

Řešení: Postupně dosazujeme nabídnuté cifry. Nepostupujeme přitom zcela náhodně – nejdříve si všimneme součtu $8 + 1$ a poté cifry 4 ve výsledku, která nás navede na fakt, že první číslo má v řádu tisíců číslici 3. Existují dvě řešení: $3982 + 216 = 4198$ a $3282 + 216 = 4198$.

Úloha 4: Pro obdélník $ABCD$ platí: Jeho obsah je roven 180 dm^2, strana b je o 3 dm delší než strana a. Urči rozměry tohoto obdélníku.

Řešení: Vyjdeme ze vzorce pro obsah obdélníku $S = a \cdot b$, ve kterém známe obsah $S =$ 180 dm^2. Můžeme postupovat podle dělitelů čísla 180 a hledat takovou dvojici, pro kterou platí, že jeden dělitel je o 3 větší než druhý. To splňují čísla 12 a 15.

Zkouška: $12 \cdot 15 = 180$; $15 - 12 = 3$.

Odpověď: Rozměry obdélníku jsou 12 dm a 15 dm.

Úloha 5: Vymysli zadání slovní úlohy, jejž řešení bude obsahovat výpočet

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + 2\right)$$

Úlohu vyřeš.

Řešení: Lada smíchala půl litru džusu a dva litry vody. Poté třetinu této směsi vypila. Kolik litrů směsi Lada vypila?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}.$$

Odpověď: Lada vypila $\frac{5}{6}$ litru směsi.

Výsledky v úlohách PL21

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 21 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 21:

Tabulka 21 Úspěšnost v úlohách PL21

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
21/1	94	Pokus–omyl (6/16), řízený experiment (4/16)
21/2	94	Algebraická (9/16), aritmetická (škrtáním ve váze a postupným dopočítáváním) (5/16)
21/3	88	Nelze identifikovat (15/16)
21/4	69	Řízený experiment (5/16), aritmetická (4/16)

Úlohu 5 vyřešili správně 2 žáci z 16. Tři žáci nechali úlohu neřešenou. Nejčastějším nedostatkem bylo vymyšlení zadání bez kontextu, dopustilo se ho 7 žáků. Jejich zadání bylo ve smyslu „Pepíček neumí vyřešit tuto úlohu, pomoz mu ji vypočítat.“ Dva žáci vymysleli zadání s kontextem, ale vytvořili dva různé základy, ze kterých určovali zlomky (například buchtu a chleba). Dva zbývající neúspěšní žáci vypočítali pouze příklad, ale zadání nevymysleli.

Žáci, kteří příklad vypočítali, postupovali nejčastěji převedením zlomků na desetinná či periodická čísla a výsledek udali jako desetinné číslo po zaokrouhlení.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 22

Jméno: ____________________

1. Vyřeš následující algebrogram. Stejná písmena nahraď stejnými ciframi a různá písmena různými ciframi. Podaří se ti najít i více řešení nebo existuje jen jedno?

$$\begin{array}{r} A\,A\,B\,A \\ \underline{9\,A\,5} \\ 4\,A\,1\,B \end{array}$$

2. Jana, Lenka a Klára sbírají figurky poníků. Lenka má o třetinu figurek poníků více než Jana. Klára má o 4 figurky méně než Lenka. Dohromady mají 73 figurek. O kolik figurek poníků méně má Jana než Klára?

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Obdélník $KLMN$ má obsah 216 m^2 a jeho obvod je 60 m. Urči, o kolik metrů je délka obdélníku kratší než jeho šířka.

4. Máme tři závaží o hmotnostech 1 g, 3 g a 7 g a rovnoramenné váhy. Závaží můžeme různě kombinovat a vážit tím jiná závaží neznámých hmotností. Kolik různých hmotností můžeme zvážit?

5. Vymysli zadání slovní úlohy, jejíž řešení bude obsahovat výpočet

$$3 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right)$$

Úlohu vyřeš.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorská řešení PL22

Úloha 1: Vyřeš následující algebrogram. Stejná písmena nahraď stejnými ciframi a různá písmena různými ciframi. Podaří se ti najít i více řešení nebo existuje jen jedno?

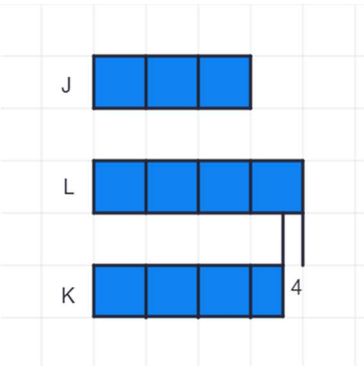
$$\begin{array}{r} A\,A\,B\,A \\ \underline{9\,A\,5} \\ 4\,A\,1\,B \end{array}$$

Řešení: Na začátek si z řádu tisíců prvního sčítance všimneme, že A může být jedině 3 nebo 4. Kdyby A bylo 3, B by bylo 8 a dostáváme pravdivý příklad $3\,383 + 935 = 4\,318$. Kdyby A bylo 4, B by bylo 9 a příklad by nešlo sestavit. Existuje tedy jediné řešení.

Odpověď: Jediným řešením úlohy je $3\,383 + 935 = 4\,318$.

Úloha 2: Jana, Lenka a Klára sbírají figurky poníků. Lenka má o třetinu figurek poníků více než Jana. Klára má o 4 figurky méně než Lenka. Dohromady mají 73 figurek. O kolik figurek poníků méně má Jana než Klára?

Řešení: Úlohu vyřešíme aritmeticky, jako podpora nám může sloužit úsečkový diagram:



Z obrázku je patrné, že kdybychom Kláře přidali 4 figurky, získali bychom celkem 11 stejných čtverečků.

$$73 + 4 = 77$$

$$77 : 11 = 7$$

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Hodnota jednoho čtverečku je 7. Jana má potom 21 figurek, Lenka 28 a Klára 24 figurek poníků.

Zkouška: $21 + 28 + 24 = 73;\ 21 + 21 : 3 = 21 + 7 = 28;\ 28 - 4 = 24.$

Odpověď: Jana má o 3 figurky poníků méně než Klára.

Úloha 3: Obdélník $KLMN$ má obsah 216 m^2 a jeho obvod je 60 m. Urči, o kolik metrů je délka obdélníku kratší než jeho šířka.

Řešení: Úlohu budeme řešit řízeným experimentem. Jsou dvě možnosti, jak lze postupovat. Můžeme vypsat všechny dělitele čísla 216 a hledat mezi nimi dvojici, jejímž součtem je 30 (polovina obvodu). Nebo naopak vezmeme polovinu obvodu a budeme hledat rozklad tohoto čísla na součet tak, aby součinem těchto čísel bylo 216. Vybereme druhou možnost.

$30 = 14 + 16;\ 14 \cdot 16 = 224$ (obsah je větší o 8 m^2).

$30 = 13 + 17;\ 13 \cdot 17 = 221$ (obsah je větší o 5 m^2).

$30 = 12 + 18;\ 12 \cdot 18 = 216$ (obsah je správný).

$a = 12$ m, $b = 18$ m.

Zkouška: $S = a \cdot b, S = 216$ m^2; $o = 2a + 2b, o = 60$ m.

Odpověď: Délka obdélníku je o 6 metrů kratší než šířka.

Úloha 4: Máme tři závaží o hmotnostech 1 g, 3 g a 7 g a rovnoramenné váhy. Závaží můžeme různě kombinovat a vážit tím jiná závaží neznámých hmotností. Kolik různých hmotností můžeme zvážit?

Řešení: Systematicky najdeme všechny možnosti uspořádání závaží na vahách:

$1 = \_;\ 3 = \_;\ 7 = \_$	můžeme zvážit 1 g, 3 g, 7 g
$1 + 3 = \_;\ 1 + 7 = \_; 3 + 7 = \_$	můžeme zvážit 4 g, 8 g a 10 g
$1 + 3 + \_ = 7; 1 + 7 = \_ + 3; 3 + 7 = \_1$	můžeme zvážit 3 g, 5 g a 9 g
$1 + 3 + 7 = \_$	můžeme zvážit 11 g

Celkem můžeme zvážit 9 různých závaží.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Úloha 5: Vymysli zadání slovní úlohy, jejíž řešení bude obsahovat výpočet

$$3 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right)$$

Úlohu vyřeš.

Řešení: Sourozenci Saša a Kryštof jedí pizzu tak, že Saša sní jednu čtvrtinu pizzy a Kryštof sní tři osminy pizzy. Zbytek nechají rodičům. Kolik pizzy snědli Saša a Kryštof za 3 dny, když každý den objednali jednu pizzu?

$$3 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

Odpověď: Za tři dny snědli jednu a sedm osmin pizzy.

Výsledky v úlohách PL22

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 22 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 22:

Tabulka 22 Úspěšnost v úlohách PL22

PL/Úloha číslo	**Úspěšnost (%)**	**Dvě nejčastěji volené strategie**
22/1	100	Nelze identifikovat (7/17), pokus–omyl (5/17)
22/2	53	Pokus–omyl (8/17), algebraická (4/17)
22/3	59	Řízený experiment (7/17), aritmetická (6/17)
22/4	47	Pokus–omyl (13/17), řízený experiment (1/17)

Úlohu 5 dokázalo správně vyřešit 6 žáků ze 17. V 5 případech bylo uvedeno slovní zadání bez reálného kontextu. Pět žáků nechalo úlohu neřešenou. V jednom případě žák uvedl dva základy pro sčítání zlomků (krabice obsahuje čtvrtinu chleba a tři osminy toustu).

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 23

Jméno: ____________________

1. Nahraď písmena číslicemi tak, aby platilo:

$$\begin{array}{r} ABC \\ \underline{AC} \\ 418 \end{array}$$

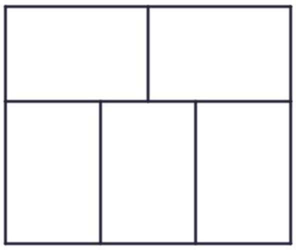
   Různým písmenům odpovídají různé cifry a stejným písmenům stejné cifry. Najdi všechna řešení úlohy.

2. Trojciferné číslo $a8b$ je dělitelné čísly 3, 4 a 5. Urči cifry a a b.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Věk Aleše a Borise je v poměru $2 : 3$. Boris je o 4 roky starší než Dan. Součet věků všech chlapců dohromady je 36. Kolik let je Alešovi?

4. Obdélník o obvodu 198 cm je rozdělen na 5 shodných obdélníků (viz obrázek). Jaký je obvod malého obdélníku a jaké jsou délky jeho stran?



5. Vymysli zadání slovní úlohy, jejž řešení bude obsahovat výpočet

$$\left(1{,}5 - \frac{1}{5}\right) \cdot 4$$

Úlohu vyřeš.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení úloh PL23

Úloha 1. Nahraď písmena číslicemi tak, aby platilo:

$$\begin{array}{r} ABC \\ \underline{\quad AC} \\ 418 \end{array}$$

Různým písmenům odpovídají různé cifry a stejným písmenům stejné cifry. Najdi všechna řešení úlohy.

Řešení: Součtem $C + C$ může být 8 nebo 18. Pokud je součtem 8, pak $C = 4$. Součtem $B + A$ nemůže být 1, musí to být 11. A je potom rovno 3 a $B = 8$. Pokud $C + C = 18$, pak $A = 3$ a $B = 7$.

Odpověď: Existují dvě řešení, a to $384 + 34 = 418$ a $379 + 39 = 418$.

Úloha 2. Trojciferné číslo $a8b$ je dělitelné čísly 3, 4 a 5. Urči cifry a a b.

Řešení: Z dělitelnosti číslem 5 plyne, že b může být 0 nebo 5. Z dělitelnosti číslem 4 plyne, že b může být pouze 0. Nyní hledáme ciferný součet čísel a, 8 a 0 tak, aby byl dělitelný 3. Tuto podmínku splňují tři čísla, 180, 480 a 780.

Odpověď: $a = 1, 4$ nebo 7, $b = 0$.

Úloha 3. Věk Aleše a Borise je v poměru $2 : 3$. Boris je o 4 roky starší než Dan. Součet věků všech chlapců dohromady je 36. Kolik let je Alešovi?

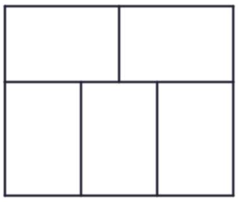
Řešení: Úlohu budeme řešit řízeným experimentem. Kdyby Alešovi bylo 6 let, Borisovi by bylo 9 let a Danovi 5 let. $6 + 9 + 5 = 20$. Svůj tip zvětšíme o 2. Kdyby Alešovi bylo 8 let, Borisovi by bylo 12 let a Danovi 8 let. $8 + 12 + 8 = 28$. Výsledek se zvětšil o 8. Výsledek je potřeba zvětšit ještě jednou o 8. To znamená, že Alešovi je 10 let, Borisovi 15 let a Danovi 11 let.

Zkouška: $10 : 15 = 2 : 3;\ 15 - 11 = 4;\ 10 + 15 + 11 = 36$

Odpověď: Alešovi je 10 let.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Úloha 3. Obdélník o obvodu 198 cm je rozdělen na 5 shodných obdélníků (viz obrázek). Jaký je obvod malého obdélníku a jaké jsou délky jeho stran?



Řešení: Úlohu budeme řešit algebraicky. Kratší stranu malého obdélníku označíme jako a a delší stranu jako b. Z obrázku je patrné, že $2b = 3a$. Pro celý obvod obdélníku platí, že 198 cm $= 4b + 5a = 6a + 5a = 11a$. Odtud tedy $a = 18$ cm a $b = 27$ cm. Obvod malého obdélníku je 90 cm.

Zkouška: $4 \cdot 27 + 5 \cdot 18 = 198$, obsah celého obdélníku je $S = 2 \cdot 27 \cdot (27 + 18)$ cm² $=$ 2 430 cm², obsah malého obdélníku je $S_m = 18 \cdot 27$ cm² $= 486$ cm², $5 \cdot S_m = 2\,430$ cm².

Odpověď: Délky stran malého obdélníku jsou 18 cm a 27 cm, jeho obvod je 90 cm.

Úloha 5. Vymysli zadání slovní úlohy, jejíž řešení bude obsahovat výpočet

$$\left(1{,}5 - \frac{1}{5}\right) \cdot 4$$

Úlohu vyřeš.

Řešení: Dita si koupila 1,5 litrovou lahev minerálky, $\frac{1}{5}$ l si odlila její spolužačka. Zbytek vypila Dita. Takto se to opakovalo 4 dny. Kolik minerálky za 4 dny celkem Dita vypila?

$$\left(1{,}5 - \frac{1}{5}\right) \cdot 4 = 1{,}3 \cdot 4 = 5{,}2$$

Odpověď: Dita vypila za 4 dny 5,2 l minerálky.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL23

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 23 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 23:

Tabulka 23 Úspěšnost v úlohách PL23

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
23/1	82	Nelze identifikovat (14/19), aritmetická (2/19)
23/2	71	Nelze identifikovat (10/19), aritmetická (5/19)
23/3	68	Řízený experiment (7/19), nelze identifikovat (6/19)
23/4	29	Aritmetická (11/19), algebraická (3/19)

Úlohu 5 dokázalo správně vyřešit 9 žáků z 19. Šest žáků vypočítalo příklad, aniž by vymyslelo zadání slovní úlohy. Zbývající 4 žáci vymysleli úlohu s kontextem, ale zadání bylo chybné.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

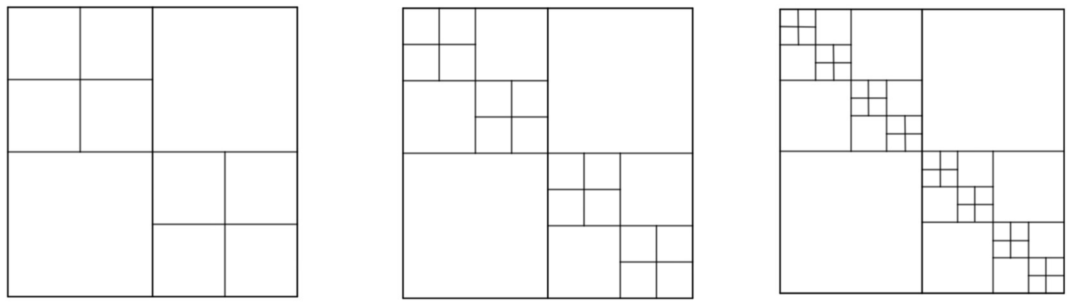
Rozvoj matematického myšlení a dovedností

Pracovní list 24

Jméno: ____________________

1. Jonášovi děda připravuje už dva týdny svačinu do školy, každý den mu dá tři kousky různého ovoce (např. banán, jablko a hrušku). Během dvou týdnů se ani jednou nestalo, že by Jonáš dostal dvakrát ke svačině stejnou trojici druhů ovoce. Kolik druhů ovoce mohl dostat Jonáš během těchto dvou týdnů do školy ke svačině nejméně a kolik nejvíce?

2. Na obrázku jsou zobrazeny první tři obrazce. Každý následující obrazec je vytvořen z předchozího obrazce podle určitého pravidla. Urči, kolik čtverců bude mít čtvrtý obrazec.



Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

3. Fotbalový míč je mnohostěn, který je složen z pravidelných pětiúhelníků a šestiúhelníků. Na míči je 12 shodných pětiúhelníků. Kolik je na míči shodných šestiúhelníků?

4. V městě, kde každý obyvatel buď mluví vždy pravdu, nebo vždy lže, sedí na lavičce dva kamarádi. Když se jich zeptáš, zda mluví pravdu, nebo lžou, první z nich odpoví: „Alespoň jeden z nás mluví pravdu.“ Rozhodni o každém z kamarádů, zda mluví pravdu, nebo lže. Rozhodnutí zdůvodni.

5. Vymysli zadání pro slovní úlohu, jejíž řešení vede na následující výpočet, úlohu vyřeš.

$$\left(8+\frac{3}{4}\right):2{,}5$$

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Autorské řešení PL24

Úloha 1. Jonášovi děda připravuje už dva týdny svačinu do školy, každý den mu dá tři kousky různého ovoce (např. banán, jablko a hrušku). Během dvou týdnů se ani jednou nestalo, že by Jonáš dostal dvakrát ke svačině stejnou trojici druhů ovoce. Kolik druhů ovoce mohl dostat Jonáš během těchto dvou týdnů do školy ke svačině nejméně a kolik nejvíce?

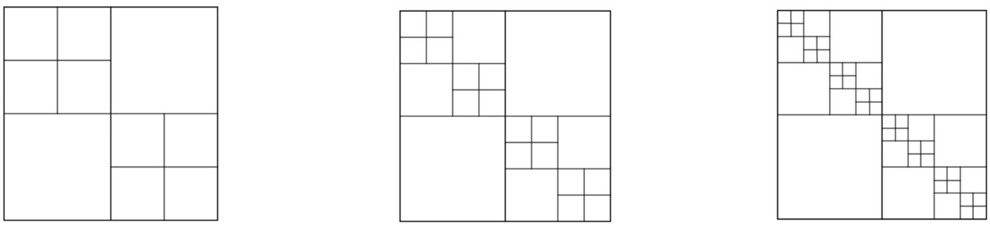
Řešení: Pro zjištění, kolik nejméně druhů ovoce mohl mít Jonáš během dvou týdnů ve škole (tedy 10 dnů) ke svačině si vypisujme možné trojice druhů označené A, B, C a dále. Vždy, když to bude nutné, přidáme další druh.

ABC, ABD, ACD, BCD, ABE, ACE, ADE, BCE, BDE, CDE

Stačilo nám tedy vyžít 5 druhů ovoce. Nejvíce druhů by Jonáš dostal v případě, že měl každý den na svačinu trojici jiných druhů, tedy dohromady $3 \cdot 10 = 30$ druhů.

Odpověď: Jonáš mohl dostat ke svačině nejméně 5 a nejvíce 30 druhů ovoce.

Úloha 2. Na obrázku jsou zobrazeny první tři obrazce. Každý následující obrazec je vytvořen z předchozího obrazce podle určitého pravidla. Urči, kolik čtverců bude mít čtvrtý obrazec.



Řešení: Spočítejme čtverce systematicky podle velikosti. V prvním obrazci je 1 veliký čtverec, v něm 4 menší čtverce, ve dvou z nich 4 nejmenší čtverce, dohromady $1 + 4 + 2 \cdot 4 = 13$ čtverců. V každém dalším obrazci přibydou v polovině nejmenších čtverců čtyři ještě menší čtverce, ve druhém obrazci tak přibyde $4 \cdot 4 = 16$ čtverců, ve třetím obrazci $8 \cdot 4 = 32$ čtverců a ve čtvrtém obrazci $16 \cdot 4 = 64$ čtverců.

Ve čtvrtém obrazci tedy bude $13 + 16 + 32 + 64 = 125$ čtverců.

Odpověď: Čtvrtý obrazec bude mít 125 čtverců.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Úloha 3. Fotbalový míč je mnohostěn, který je složen z pravidelných pětiúhelníků a šestiúhelníků. Na míči je 12 shodných pětiúhelníků. Kolik je na míči shodných šestiúhelníků?

Řešení: Každý pětiúhelník obklopuje pět šestiúhelníků, každý šestiúhelník sousedí se třemi pětiúhelníky. Šestiúhelníků je na fotbalovém míči $\frac{12 \cdot 5}{3} = 20$.

Odpověď: Na fotbalovém míči je 20 shodných šestiúhelníků.

Úloha 4. V městě, kde každý obyvatel buď mluví vždy pravdu, nebo vždy lže, sedí na lavičce dva kamarádi. Když se jich zeptáš, zda mluví pravdu, nebo lžou, první z nich odpoví: „Alespoň jeden z nás mluví pravdu.“ Rozhodni o každém z kamarádů, zda mluví pravdu, nebo lže. Rozhodnutí zdůvodni.

Řešení: Pokud první z kamarádů mluví pravdu, může být druhý lhář (pak by jeden z nich mluvil pravdu), nebo může i také mluvit pravdu (pak mluví pravdu oba). Pokud první lže, není pravda, že alespoň jeden z nich mluví pravdu, tedy ani jeden z nich nemluví pravdu – druhý je lhář také. Dohromady tedy získáváme tři možná řešení.

Odpověď: Pravdomluvec – Lhář, Pravdomluvec – Pravdomluvec, Lhář – Lhář

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Výsledky v úlohách PL24

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pracovního listu 24 a dvě nejčastěji volené strategie jsou uvedeny v tabulce 24:

Tabulka 24 Úspěšnost úloh v PL24

PL/Úloha číslo	Úspěšnost (%)	Dvě nejčastěji volené strategie
24/1	23	Aritmetická (11/13), nelze identifikovat (1/13)
24/2	69	Aritmetická (13/13)
24/3	62	Aritmetická (8/13), nelze identifikovat (5/13)
24/4	65	Nelze identifikovat (12/13), řízený experiment (1/13)

Úlohu 5 vyřešili správně 2 žáci ze 13. Tři žáci nechali úlohu neřešenou. Zadání bez kontextu uvedlo 8 žáků.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Zdroje úloh

Budínová, I. (2024). *Matematika na čtverečkovaném papíře*. Edika.

Budínová, I., Blažková, R. (2017). *Matematika pro bystré a nadané žáky. Úlohy pro žáky 2. stupně ZŠ a víceletých gymnázií, jejich rodiče a učitele*. Edika

Budínová, I. (2018). *Přístupy nadaných žáků 1. a 2. stupně základní školy k řešení některých typů úloh v matematice*. MUNIPress

Cermat. Dostupné z: https://prijimacky.cermat.cz/menu/testova-zadani-k-procvicovani/testova-zadani-v-pdf/sestilete-obory-matematika

Cermat. Dostupné z: https://prijimacky.cermat.cz/menu/testova-zadani-k-procvicovani/testova-zadani-v-pdf/osmilete-obory-matematika

Čermáková, M. (2013). *Metodická příručka projektu krychlová tělesa aneb hrátky s krychlí.*

MindTrap Games Inc. (2011). Mozkovna: Logické hádanky. Albi

https://mozkolam.cz/matematicke-hlavolamy/hlavolamy-na-mereni/devet-minci/

Novoveský, Š., Křižalkovič, K., Lečko, I. (1971). *777 matematických zábav a her*. Státní pedagogické nakladatelství.

Pangea (2024). Dostupné z: https://www.pangeasoutez.cz/

Smullyan, R., M. (1986). *Jak se jmenuje tahle knížka?* Mladá fronta.

Ženatá, E. (n. d.). *Sbírka úloh z matematiky pro 6. ročník s klíčem*. Blug.

Ženatá, E. (n. d.). *Přehled učiva matematiky s příklady a řešením pro 6.-9. ročník ZŠ a odpovídající ročníky víceletých gymnázií.* Blug.

Obrázek v pracovním listu 8 byl vytvořen umělou inteligencí ChatGPT.

Obrázky v pracovních listech 11, 18, 19 a 20 byly vytvořeny v programu blender.org.

Literatura

Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook 1: Cognitive domain*. New York, NY: McKay.

Bransford, J. D., Brown, A. L, Cocking, R. R. (eds.) (2004). *How People Learn*. National Academy Press.

Budínová, I. (2018). Přístupy nadaných žáků 1. a 2. stupně základní školy k řešení některých typů úloh v matematice. Masarykova univerzita.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy

Dimitriadis, Ch. (2012). How Are Schools in England Addressing the Needs of mathematically Gifted Children in Primary Classrooms? A Review of Practice. *Gifted Child Quarterly,* 56(2), 59–76.

Kopka, J. (2007). *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. Univerzita J. E. Purkyně.

Koshy, V. (2001). *Teaching mathematics to able children*. London, England: David Fulton.

Krathwohl, D. R. (2002). A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview. *Theory into practice,* 41(4), 212–218.

Lai Y, Zhu X, Chen Y, Li Y (2015) Effects of Mathematics Anxiety and Mathematical Metacognition on Word Problem Solving in Children with and without Mathematical Learning Difficulties. PLoS ONE 10(6).

Pintrich, P. R. (2002). The Role of Metacognitive Knowledge in Learning, Teaching and Assessing. *Theory into practice,* 41(4), 212–218.

Sheffield, L. J. (2003). *Extending the challenge in mathematics: Developing mathematical promise in K-8 students*. Thousand Oaks, CA: Texas Association for the Gifted and Talented/Corwin Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In D. A. Grouws & National Council of Teachers of Mathematics (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan.

Materiál vznikl v rámci projektu **Rozvoj matematického myšlení a dovedností u nadaných žáků v matematice prostřednictvím rozvojových a obohacujících aktivit**. Pracoviště: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity
© 2024, Irena Budínová, Jitka Panáčová, Jana Veseláková, Petra Antošová
Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy